

КЛАССИЧЕСКИЙ УЧЕБНИК МГУ

А. А. Ошемков  
Ф. Ю. Попеленский  
А. А. Тужилин  
А. Т. Фоменко  
А. И. Шафаревич

А. А. Ошемков, Ф. Ю. Попеленский,  
А. А. Тужилин, А. Т. Фоменко,  
А. И. Шафаревич

КУРС НАГЛЯДНОЙ  
ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

**К**УРС НАГЛЯДНОЙ

**ГЕОМЕТРИИ**  
*и*  
**ТОПОЛОГИИ**



*Классический учебник МГУ*

---

**А. А. Ошемков  
Ф. Ю. Попеленский  
А. А. Тужилин  
А. Т. Фоменко  
А. И. Шафаревич**

# **КУРС НАГЛЯДНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ**

Издание второе,  
исправленное



**URSS**

**МОСКВА**

ББК 22.151 22.152 22.1я73

**Ошемков Андрей Александрович, Попеленский Федор Юрьевич,  
Тужилин Алексей Августинович, Фоменко Анатолий Тимофеевич,  
Шафаревич Андрей Игоревич**

**Курс наглядной геометрии и топологии.** Изд. 2-е, испр. — М.: ЛЕНАНД,  
2016. — 352 с. (Классический учебник МГУ.)

Книга основана на курсе лекций, которые с 2012 года читаются студентам механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова. Этот курс лекций новый, в нем рассматриваются глубокие и важные вопросы, допускающие вместе с тем наглядное представление и неформальное обсуждение.

Сохраняя высокий уровень строгости, авторы старались также не упускать возможности показать красоту и наглядность обсуждаемых геометрических идей и конструкций.

Книга предназначена студентам механико-математических специальностей университетов, но при этом довольно большая часть материала доступна широкому кругу читателей, в том числе учащимся старших классов.

ООО «ЛЕНАНД». 117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 11А, стр. 11.  
Формат 60×90/16. Печ. л. 22. Тираж 700 экз. Зак. № 663.

Отпечатано в ОАО «Областная типография «Печатный двор».  
432049, г. Ульяновск, ул. Пушкарева, 27.

ISBN 978–5–9710–2406–4

© ЛЕНАНД, 2014, 2015

18455 ID 202732



НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА	
	E-mail: URSS@URSS.ru
	Каталог изданий в Интернете: <a href="http://URSS.ru">http://URSS.ru</a>
	Тел./факс (многоканальный): + 7 (499) 724 25 45
	URSS

Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>9</b>
<b>1 Элементы теории графов</b>	<b>16</b>
1.1 Основные понятия теории графов . . . . .	16
1.2 Эйлеровы графы . . . . .	19
1.3 Гамильтоновы графы . . . . .	23
Литература к главе 1 . . . . .	26
Упражнения к главе 1 . . . . .	26
<b>2 Элементы топологии</b>	<b>29</b>
2.1 Топологические пространства и непрерывные отображения . . . . .	29
2.1.1 База окрестностей . . . . .	30
2.1.2 Непрерывные отображения . . . . .	32
2.1.3 Открытые множества и непрерывные отображения . . . . .	33
2.1.4 Топология и топологические пространства . . . . .	33
2.1.5 Индуцированная топология . . . . .	35
2.2 Гомеоморфизм . . . . .	36
2.3 Линейная связность . . . . .	39
2.4 Компактность . . . . .	42
Литература к главе 2 . . . . .	43
Упражнения к главе 2 . . . . .	44
<b>3 Теорема Жордана</b>	<b>46</b>
3.1 Теорема Жордана . . . . .	46
3.2 Ломаные и теорема Жордана . . . . .	49
3.3 Доказательство теоремы Жордана для ломаных . . . . .	51
3.3.1 Реализация пункта (1) . . . . .	53
3.3.2 Реализация пункта (2) . . . . .	54



3.3.3	Реализация пункта (3) . . . . .	55
3.3.4	Реализация пункта (4) . . . . .	56
	Литература к главе 3 . . . . .	58
	Упражнения к главе 3 . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Приложения теоремы Жордана. Плоские графы</b>	<b>61</b>
4.1	Геометрические графы . . . . .	64
4.2	Плоские и планарные графы . . . . .	66
4.3	Формула Эйлера для плоских графов . . . . .	67
4.4	Планарные графы. Критерий Понтрягина–Куратовского . . . . .	71
	Литература к главе 4 . . . . .	73
	Упражнения к главе 4 . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Многогранники</b>	<b>75</b>
5.1	Многоугольники . . . . .	75
5.2	Многогранные поверхности. Определение многогранников . . . . .	77
5.3	Графы, связанные с многогранными поверхностями . . . . .	81
5.4	Выпуклые многогранники . . . . .	83
5.5	Формула Эйлера для многогранников . . . . .	89
5.6	Правильные многогранники . . . . .	89
5.7	Теорема о “еже” выпуклого многогранника . . . . .	91
	Литература к главе 5 . . . . .	93
	Упражнения к главе 5 . . . . .	93
<b>6</b>	<b>Элементы сферической геометрии</b>	<b>96</b>
6.1	Сферические фигуры . . . . .	96
6.2	Выпуклые сферические многоугольники . . . . .	101
6.3	Эйлеровы многоугольники . . . . .	105
6.4	Сферические треугольники . . . . .	108
6.5	Расстояние на сфере . . . . .	109
6.6	Окружности на сфере . . . . .	109
6.7	Теоремы о сферических треугольниках . . . . .	111
	Литература к главе 6 . . . . .	117
	Упражнения к главе 6 . . . . .	117
<b>7</b>	<b>Жесткие и изгибаемые многогранники</b>	<b>119</b>
7.1	Тригонометрическая лемма Коши . . . . .	119
7.2	Многогранники с одинаковой структурой границы . . . . .	124

7.3	Теорема Коши о жесткости выпуклых многогранников . . . . .	125
7.4	Изгибаемые многогранники . . . . .	129
	Литература к главе 7 . . . . .	132
	Упражнения к главе 7 . . . . .	134
<b>8</b>	<b>Равновеликость и равноставленность.</b>	
	<b>Третья проблема Гильберта</b>	<b>135</b>
8.1	Критерий равноставленности многогранников . . . . .	138
8.2	Примеры вычисления инвариантов Дена . . . . .	139
8.3	Некоторые следствия из теоремы Дена . . . . .	140
8.4	Доказательство теоремы Дена . . . . .	142
8.5	Решение Третьей проблемы Гильберта . . . . .	144
8.6	Дальнейшее развитие . . . . .	146
	Литература к главе 8 . . . . .	147
	Упражнения к главе 8 . . . . .	147
<b>9</b>	<b>Кратчайшие кривые и геодезические</b>	<b>149</b>
9.1	Кратчайшие кривые . . . . .	150
9.1.1	Евклидово пространство . . . . .	150
9.1.2	Нормированное пространство . . . . .	152
9.1.3	Манхеттенское пространство . . . . .	153
9.1.4	Сфера . . . . .	154
9.1.5	Многогранники . . . . .	157
9.1.6	Интегральная формула длины пространственной кривой . . . . .	160
9.1.7	Прямой круговой цилиндр . . . . .	161
9.2	Геодезические . . . . .	162
	Литература к главе 9 . . . . .	164
	Упражнения к главе 9 . . . . .	165
<b>10</b>	<b>Минимальные сети</b>	<b>167</b>
10.1	Кратчайшие деревья на евклидовой плоскости . . . . .	168
10.1.1	Задача Ферма . . . . .	168
10.1.2	Локальная структура кратчайших деревьев. Локально минимальные деревья . . . . .	169
10.1.3	Алгоритм построения кратчайшего дерева на евклидовой плоскости . . . . .	171
10.1.4	Алгоритм Мелзака . . . . .	172
10.2	Формула Максвелла . . . . .	175

10.3	Замкнутые локально минимальные сети на многогранниках . . . . .	176
	Литература к главе 10 . . . . .	178
	Упражнения к главе 10 . . . . .	179
<b>11</b>	<b>Инварианты плоских замкнутых кривых</b>	<b>182</b>
11.1	Замкнутые гладкие и регулярные кривые на плоскости . . . . .	183
11.1.1	Свойства периодических функций . . . . .	185
11.2	Число вращения. Классификация замкнутых регулярных кривых . . . . .	187
11.3	Число вращения и точки самопересечения . . . . .	194
11.4	Число Уитни. Теорема Уитни . . . . .	196
	Литература к главе 11 . . . . .	197
	Упражнения к главе 11 . . . . .	198
<b>12</b>	<b>Двумерные поверхности</b>	<b>200</b>
12.1	Край триангулируемой поверхности . . . . .	203
12.2	Ориентация триангулируемых поверхностей . . . . .	204
12.3	Гомеоморфизм поверхностей . . . . .	207
12.4	Склейки из квадрата . . . . .	207
12.5	Основные операции . . . . .	208
12.6	Классификация ориентируемых поверхностей . . . . .	209
12.7	Классификация неориентируемых поверхностей . . . . .	215
	Литература к главе 12 . . . . .	219
	Упражнения к главе 12 . . . . .	219
<b>13</b>	<b>Шарнирные механизмы</b>	<b>221</b>
13.1	Простейшие шарнирные механизмы . . . . .	222
13.1.1	Шарнирный механизм, реализующий параллельный перенос . . . . .	222
13.1.2	Важное замечание. Антипараллелограмм . . . . .	222
13.1.3	Укрепление параллелограмма и антипараллелограмма . . . . .	223
13.1.4	Параллельный перенос и сложение векторов: транслятор Кемпе . . . . .	225
13.1.5	Умножение углов на целые числа и деление углов на равные части: реверсор Кемпе . . . . .	226
13.1.6	Сложения углов: сумматор Кемпе . . . . .	227
13.2	Инверсия . . . . .	228
13.2.1	Определение и основные свойства инверсии . . . . .	228

13.2.2	Механизмы, реализующие инверсию . . . . .	231
13.3	Теорема Кемпе . . . . .	234
13.3.1	Рисуемые множества и теорема Кинга . . . . .	234
13.3.2	Универсальная теорема Кемпе . . . . .	236
13.4	Исторические комментарии . . . . .	239
13.4.1	Паровая машина и параллелограмм Уатта . . . . .	239
13.4.2	Лямбда-механизм и стопоходящая машина Чебышева . . . . .	242
13.4.3	Инверсор Поселье . . . . .	245
13.5	Формализация . . . . .	245
13.5.1	Пример: ромб . . . . .	248
13.5.2	Укрепление шарнирного механизма: общий подход . . . . .	250
13.5.3	Пример: параллелограмм и антипараллелограмм . . . . .	251
13.5.4	Как нарисовать решение уравнения? . . . . .	252
	Литература к главе 13 . . . . .	253
<b>14</b>	<b>Симметрии плоских кристаллов</b>	<b>255</b>
14.1	Плоские кристаллы и их группы симметрий . . . . .	255
14.2	Замощения . . . . .	257
14.3	Группа движений прямой и ее дискретные подгруппы . . . . .	265
14.4	Движения плоскости . . . . .	269
14.5	Группы симметрий бордюров . . . . .	273
14.5.1	Движения, содержащиеся в группе бордюра . . . . .	273
14.5.2	Классификация групп . . . . .	277
14.6	Немного алгебры . . . . .	279
14.7	Кристаллографические группы для плоскости . . . . .	281
14.8	Параллельные переносы в кристаллографической группе . . . . .	282
14.9	Повороты и отражения. 10 кристаллографических классов . . . . .	285
14.10	Симметрии решеток. 13 арифметических классов . . . . .	287
14.11	Решетки Браве, типы Браве и сингонии . . . . .	290
14.12	Классификация федоровских групп . . . . .	291
14.13	Когомологии кристаллографических классов . . . . .	297
14.14	Алгебраический аспект кристаллографии. Классификация в других размерностях . . . . .	298
14.15	Квазикристаллы . . . . .	301
	Литература к главе 14 . . . . .	306

<b>15</b>	<b>Пространство Минковского</b>	<b>309</b>
15.1	Псевдоевклидово скалярное произведение . . . . .	309
15.2	Подпространства и ортогональные дополнения . . . . .	311
15.3	Преобразования Лоренца . . . . .	315
15.4	Собственное время. Инерциальные наблюдатели. Относительность одновременности, сокращение длин и замедление времени . . . . .	318
15.5	Собственное время. Инерциальные наблюдатели. Неравенство Коши-Буняковского, неравенство треугольника и парадокс близнецов . . . . .	321
	Литература к главе 15 . . . . .	322
	Упражнения к главе 15 . . . . .	323
<b>16</b>	<b>Геометрия Лобачевского</b>	<b>324</b>
16.1	Псевдосфера в пространстве Минковского . . . . .	324
16.2	Касательная плоскость к псевдосфере и геометрия Лобачевского . . . . .	325
16.3	Движения и прямые плоскости Лобачевского . . . . .	326
16.4	Нарушение аксиомы параллельных . . . . .	328
16.5	Расстояние на плоскости Лобачевского . . . . .	329
16.6	Окружности на плоскости Лобачевского . . . . .	330
16.7	Треугольники на плоскости Лобачевского . . . . .	330
16.8	Стереографическая проекция псевдосферы. Метрика Лобачевского в модели Пуанкаре на единичном круге . . . . .	333
16.9	Комплексные координаты и комплексная запись скалярного произведения . . . . .	335
16.10	Модель Пуанкаре в верхней полуплоскости . . . . .	336
16.11	Углы в модели Пуанкаре . . . . .	336
16.12	Прямые в модели Пуанкаре . . . . .	337
16.13	Движения в модели Пуанкаре . . . . .	339
	Литература к главе 16 . . . . .	340
	Упражнения к главе 16 . . . . .	340
	<b>Предметный указатель</b>	<b>343</b>

Наглядное понимание — это  
большая доказательная сила.

---

Давид Гильберт.

# Введение

В нашей книге излагается недавно возникший курс “Наглядная геометрия и топология”, который стал читаться на механико-математическом факультете МГУ им. М.В.Ломоносова в 2012 году. Курс читается студентам-первокурсникам математикам и механикам и вызвал большой интерес. Он появился в ответ на многочисленные запросы и тенденции, как в современном вузовском преподавании геометрии, так и в новых приложениях геометрии и топологии к практическим задачам. Следует учитывать также быстрое развитие и усложнение современной геометрии и ее приложений, — например, в компьютерной и инженерной геометрии, в математической физике и механике. Поэтому стала очевидна необходимость создания курса, в котором многие фундаментальные понятия современной геометрии и топологии вводились и объяснялись бы, опираясь на их наглядность. Это помогает студентам быстрее “войти в курс дела” и легче разбираться в последующих сложных теоремах и конструкциях. Наглядность — это тот ценный инструмент, который сегодня востребован как никогда, а потому должен быть активно внедрен в геометрическое образование как самостоятельное направление. Вообще, современная геометрия и топология занимают особое место в математике благодаря наглядности многих образов, с которыми они имеют дело. Кроме того, обучение наглядному пониманию помогает вырабатывать геометрическую интуицию, играющую огромную роль в теоретических и прикладных исследованиях.

Идея введения такого нового современного “наглядного” курса на механико-математическом факультете МГУ принадлежит заведующему Отделением математики факультета, заведующему кафедрой Дифференциальной геометрии и приложений, академику РАН А.Т.Фоменко. Курс был подготовлен в 2011–2012 годах кафедрой, возглавляемой А.Т.Фоменко.



Здесь, конечно, надо вспомнить замечательную книгу “Наглядная геометрия”, написанную Д.Гильбертом и С.Кон-Фоссенем в начале XX века на основе лекций, прочитанных Давидом Гильбертом в 1920–1921 годах в Геттингене (первый русский перевод появился в 1936 году; последнее издание: М.: URSS, 2016.). В 1932 году Гильберт писал: «Что касается геометрии, то в ней тенденция к абстракции привела к грандиозным систематическим построениям алгебраической геометрии, римановой геометрии и топологии, в которых находят широкое применение методы абстрактных рассуждений, символики и анализа. Тем не менее, и ныне наглядное понимание играет первенствующую роль в геометрии, и притом не только как обладающее большой доказательной силой при исследовании, но и для понимания и оценки результатов исследования».

Эти идеи Гильберта сегодня по-прежнему актуальны. В то же время за прошедшее почти столетие возникло множество новых направлений в геометрии и ее приложениях, нуждающихся не только в “наглядном истолковании”, но и во внедрении новых “наглядных методов” исследования. Как было справедливо отмечено Гильбертом, наглядное понимание — это большая доказательная сила. Следовательно, студентов, механиков и физиков всех специальностей, а не только геометров, надо учить наглядному пониманию и геометрической интуиции с самых первых шагов обучения. О фундаментальной роли интуиции в науке много писал Анри Пуанкаре.

Важный шаг в России на пути внедрения наглядности в вузовское геометрическое образование был предпринят А.Т.Фоменко еще в 1993 году, в книге “Наглядная геометрия и топология. Математические образы в реальном мире” (М., 1993; 2-е изд., перераб. и доп.: М., 1998). В этой книге, основанной на спецкурсе, который много лет читал автор на мехмате МГУ, “наглядным языком” рассказаны элементы теории полиэдров, теории гомологий, симплектической геометрии и механики, теории многообразий малой размерности. Как было сказано в предисловии к этой книге, «Во многих глубоких научных математических работах, посвященных многомерной геометрии, активно используется “наглядный жаргон”, выработанный при исследовании двумерных и трехмерных образов, вроде “разрежем поверхность”, “склеим листы”, “приклеим цилиндр”, “вывернем сферу наизнанку” и пр. Такая терминология — не прихоть математиков, а “производственная необходимость”, поскольку ее употребление и само математическое мышление авторов в терминах этих образов оказываются совершенно необходимыми при доказательстве многих технически невероятно трудных результатов».

Также в книге А.Т.Фоменко на доступном и наглядном языке рассказано о некоторых классических и современных достижениях геометрии, связанных как с математическими проблемами, так и с приложениями к естествознанию — механике, физике, биологии и др.

За прошедшие годы на нашей кафедре был накоплен новый большой методический опыт и фактический материал в области использования “наглядного понимания как доказательной силы”. В 2007 году А.Т.Фоменко выдвинул идею создания на мехмате МГУ общего годового Практикума по компьютерной геометрии для студентов второго и третьего курсов. В итоге, начиная с весеннего семестра 2009 года, эта идея была успешно реализована на мехмате МГУ. Данный Практикум принципиально отличается от традиционных практикумов по компьютерной геометрии, существующих в других ВУЗах тем, что в его основу положена наглядность. Кроме того, Практикум не ограничивается лишь вычислительной геометрией, а, опираясь на новейшие методы и результаты, знакомит студентов с актуальными приложениями геометрического компьютерного моделирования в современной науке. Был написан и издан фундаментальный учебник “Компьютерная геометрия”. Его авторами были: Н.Н.Голованов, Д.П.Ильютко, Г.В.Носовский и А.Т.Фоменко. Затем коллективом авторов — А.О.Ивановым, Д.П.Ильютко, Г.В.Носовским, А.А.Тужилиным и А.Т.Фоменко — было написано и издано учебное пособие “Компьютерная геометрия: практикум”, в серии: Основы информатики и математики (М., 2010).

Все это вместе взятое позволило нам сделать следующий шаг и предпринять большой труд по созданию и внедрению курса “Наглядная геометрия и топология”. Вкратце опишем структуру настоящей книги. Она построена в виде лекций, то есть является тем фундаментом, на котором основан реально читаемый студентам-первокурсникам курс. Некоторые разделы книги выходят за рамки курса, чтобы дать возможность особо активным студентам расширить свои знания самостоятельно.

Итак, цель наших лекций — осветить ряд важных тем, которые традиционно не затрагиваются в вузовских курсах геометрии и топологии, несмотря на то, что они касаются базовых вопросов и, в явном или неявном виде, используются в различных приложениях. К таким темам относятся, например,

- знаменитая теорема Жордана, утверждающая, что плоская замкнутая непрерывная кривая без самопересечений разбивает евклидову плоскость на две части;

- инверсия относительно окружности — преобразование плоскости, меняющее местами внутренность и внешность круга;
- формула Эйлера для многогранника и более общих объектов, разбитых на грани разной размерности, связывающая количества этих граней;
- сферическая геометрия, в которой точки лежат на сфере, а прямыми являются большие окружности, получающиеся пересечением сферы и плоскостей, проходящих через центр, и многое другое.

Кроме того, есть ряд красивых и важных классических тем, которые вполне понятны студентам первого курса и даже старшим школьникам, но, тем не менее, эти темы обычно не обсуждаются из-за недостатка времени. Например, можно ли разрезать многоугольник на конечное число частей, переложить эти части и таким образом получить любой заранее заданный многоугольник? А многогранник? Или другой вопрос: что можно нарисовать на плоскости с помощью механизма, собранного из жестких стержней и подвижно соединяющих их шарниров? А какой формы могут быть кристаллы? И каковы их симметрии? Все эти и многие другие вопросы мы разбираем в нашем курсе. Кроме того, мы расскажем о разделах геометрии и топологии, которые в настоящее время все больше используются в физике, химии, биологии, лингвистике, экономике и других науках.

Мы избегаем излишней формализации, стремясь к максимально простой подаче материала, стараемся не загромождать курс излишними техническими подробностями.

Мы начинаем с математического понятия, особенно важного для современных приложений, — понятия графа. На языке графов описываются различные дискретные структуры, т.е. совокупности объектов (вершин графа) и связей между ними (ребер графа). Вот некоторые примеры структур, естественно моделируемых с помощью графов:

- состав молекулы вещества, где вершины — атомы, а ребра — связи;
- химическая лаборатория живой клетки, где вершины — молекулы клетки, а ребра описывают взаимодействия этих молекул;
- эволюционное дерево (в живой природе или, скажем, лингвистике), в котором вершины — виды, а ребра показывают, какие виды из каких произошли;

- транспортная система с вершинами — пунктами назначения и развилками, а ребрами — коммуникационными линиями: дорогами, трубопроводами, телефонными линиями и т.д.;
- остовы многогранников, где вершины и ребра — это они же для многогранника.

В последних двух примерах связь естественно представлять с помощью кривых, соответствующих дорогам, трубопроводам, телефонным кабелям или ребрам многогранника. Такое представление, кроме всего прочего, является наглядным, и поэтому графы, даже с негеометрическими связями, принято изображать на плоскости с помощью кривых, моделирующих ребра. Естественно, для упрощения графа, постараться добиться того, чтобы не возникало лишних точек пересечения. Отметим, что на практике возникают очень сложные графы, так что эта задача оптимизации чрезвычайно важна. Однако, как оказывается, не все графы можно расположить на плоскости без дополнительных пересечений. Чем же выделяются “хорошие” графы? Этот вопрос замечателен тем, что для ответа на него необходимо использовать не только чисто комбинаторные свойства графа, но и геометрию и топологию кривых на плоскости. В частности, упомянутую выше теорему Жордана, согласно которой, вершины, попавшие в разные части плоскости (относительно разбивающей плоскость кривой), не могут быть соединены непрерывной кривой, не пересекающей разбивающую. И еще более удивительно, ответ можно дать в чисто комбинаторных терминах!

Теорема Жордана, кстати, порождает новый объект, возникающий при расположении графа на плоскости, а именно, грани этого графа. Интересно, что, несмотря на “наглядную очевидность”, теорема Жордана доказывается совсем не просто. Ведь мы должны научиться различить точки, принадлежащие разным частям. Оказывается, это можно сделать с помощью специального топологического инварианта. Здесь слово “топологический” обозначает, что те же самые методы годятся для объектов, полученных из исходного непрерывной деформацией составляющих его частей, при которой запрещены разрывы и склейки.

Идея построения различных инвариантов, не обязательно топологических, привела к большому числу нетривиальных результатов, и мы неоднократно будем демонстрировать, как она работает. Например, говоря про равноставленность многогранников, — т.е. обсуждая проблему, когда два многогранника можно собрать из одного и того же набора многогранников, — мы расскажем про алгебро-геометрический

инвариант Дена, который одинаков у равносторонних многогранников, и разный — у остальных.

Другой пример — задача описания замкнутых регулярных (у которых скорость всюду отлична от нуля) кривых на плоскости. Здесь мы будем интересоваться инвариантом, который принимает одинаковые значения на кривых, получающихся друг из друга деформацией, оставляющей все промежуточные кривые регулярными, и разный на кривых, не удовлетворяющих этому свойству. Такой инвариант построить несложно. Интересно другое: а что будет, если из плоскости выколоть точку? Или же рассматривать кривые не на плоскости, а на сфере или другой поверхности? Оказывается, построенного инварианта уже недостаточно. Отметим, что в двумерном случае эта задача решена совсем недавно, однако ответ приводится в терминах фундаментальной группы поверхности, обсуждение которой выходит за рамки данного курса.

Еще одним инвариантом, который мы изучаем в нашем курсе, является эйлерова характеристика многогранника, равная сумме количеств вершин и граней минус число ребер. Здесь, впрочем, речь идет о многогранниках более общего вида, чем обычно принято рассматривать. Например, в многогранник можно превратить тор (поверхность бублика), хотя стандартные выпуклые многогранники имеют форму сферы. Оказывается, эта величина зависит лишь от того, как устроен многогранник в целом. Так, у всех многогранников типа сферы эйлерова характеристика всегда равна 2, у всех многогранников типа тора — нулю.

Мы обсудим, какими вообще могут быть многогранники в целом. На самом деле, речь пойдет о более широком классе объектов. Это — многообразия, которые представляют собой далеко идущее обобщение понятий кривой и поверхности. В малых окрестностях своих точек многообразия “устроены так же”, как кривая или поверхность. Описание многообразий в двумерном случае оказывается достаточно простым и наглядным, и мы его приведем. Классификации многомерных многообразий в общем случае нет и, в некотором смысле, даже быть не может, из-за чрезмерной сложности семейства всех видов многообразий. Одной из центральных задач, которой активно занимается алгебраическая топология, является построение различных топологических инвариантов, различающих те или иные группы многообразий.

В некотором смысле “двойственный подход” к построению инвариантов состоит в описании преобразований, сохраняющих те или иные структуры изучаемых объектов. Так, например, возникает задача классификации всех движений евклидова пространства, или же движений,

переводящих в себя данный многогранник (группы симметрий этого многогранника), или дискретной группы движений “решеток”, что приводит к пониманию возможных форм кристаллов. Знание того, как устроена группа преобразований, позволяет эффективно решать многие задачи посредством выбора из класса эквивалентных объектов тех, которые наиболее просто описываются. Эту идею мы продемонстрируем на примере геометрии Лобачевского, про которую также говорится в нашем курсе.

Наконец, еще одна тема — теория геометрических экстремалей. Ее цель — научиться описывать объекты, оптимальные по тем или иным свойствам. Так, для прокладывания маршрута, скажем, в гористой местности, может быть важно из всех возможных путей выбрать наиболее короткий, чтобы затраты на его построение оказались минимальными. Или же при проектировании микросхемы необходимо расположить проводники, соединяющие различные ее элементы, так, чтобы суммарная их длина была наименьшей. Тогда микросхема будет не так сильно нагреваться. Кратчайшие кривые возникают как “прямые” в разных геометриях — евклидовой, сферической, в геометрии Лобачевского. Их обобщение — разветвленные кратчайшие кривые — соединяют в себе геометрическую оптимальность и богатство комбинаторной структуры, что приводит к многочисленным их приложениям.

Более подробный перечень сюжетов см. в оглавлении.

Мы благодарны всем сотрудникам кафедры дифференциальной геометрии и приложений за обсуждения, дискуссии, ознакомление с текстом и полезные замечания. Особую благодарность мы выражаем профессору А.О.Иванову за тщательное вычитывание текста и исправление неточностей.



# Глава 1

## Элементы теории графов

**План.** Общее определение графов, вершины, ребра, граничное отображение или отображение инцидентности, инцидентные вершины и ребра, вершины, соединенные ребром, смежные вершины, смежные ребра, петля, кратное ребро, кратность ребра, простой граф, лемма о рукопожатиях, степень вершины, задача Эйлера, маршрут, замкнутый маршрут, длина маршрута, путь, цикл, связный граф, эйлеров цикл или обход графа, эйлеров граф, критерий эйлеровости графа, простой цикл, гамильтонов цикл, гамильтонов граф, теорема Дирака — достаточное условие гамильтоновости, висячая вершина графа, дерево.

### 1.1 Основные понятия теории графов

Для произвольного множества  $V$  через  $V_k$  будем обозначать множество всех  $k$ -элементных подмножеств множества  $V$ . Множество  $V_2$  совпадает с множеством неупорядоченных пар различных элементов  $V$ . Множество  $V_1$  состоит из одноэлементных подмножеств множества  $V$ , его можно отождествить с  $V$ . Если множество  $V$  конечно и состоит из  $n$  элементов, то  $V_k$  пусто при  $k > n$ .

**Определение 1.1.** *Графом  $G$  называется тройка  $G = (V, E, \partial)$ , состоящая из множеств  $V$ ,  $E$  и отображения  $\partial: E \rightarrow V_1 \cup V_2$ . Элементы из  $V$  называются *вершинами* графа  $G$ , элементы из  $E$  — *ребрами* графа  $G$ , а  $\partial$  — *граничным отображением*, или *отображением инцидентности*.*

**Замечание 1.2.** *Всюду, если не оговорено противное, мы будем рассматривать *конечные графы*, т.е. графы, у которых множества  $V$  и  $E$  конечны.*

**Пример 1.3.** Пусть  $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ ,  $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ ,  $\partial(e_i) = \{v_j, v_k\}$  для любых  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ . Тогда граф  $(V, E, \partial)$  можно рассматривать как модель треугольника с множеством вершин  $V$  и множеством

сторон  $E$ . При этом граничное отображение  $\partial$  показывает, к каким вершинам каждое из ребер  $e_i$  “приклеивается”, например,  $\partial(e_1) = \{v_2, v_3\}$ , так что  $e_1$  приклеивается к  $v_2$  и  $v_3$ .

Для наглядности графы представляют в виде точек-вершин, соединенных линиями-ребрами. На рис. 1.1 слева изображен граф из примера 1.3, а справа — граф более общего вида.

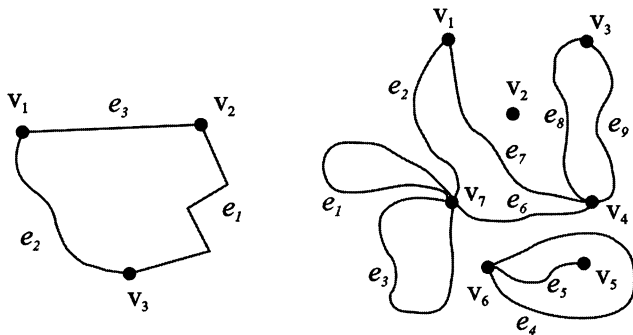


Рис. 1.1: Примеры изображения графов

В теории графов принята следующая терминология:

- если  $v \in \partial(e)$ , то говорят, что вершина  $v$  и ребро  $e$  *инцидентны*;
- если  $\partial(e) = \{v, w\}$ , то говорят, что вершины  $v$  и  $w$  *смежны*, или же, что они *соединены ребром  $e$* ;
- ребра  $e$  и  $e'$  называются *смежными*, если  $\partial(e) \cap \partial(e') \neq \emptyset$ ;
- ребро, инцидентное ровно одной вершине, называется *петлей*;
- если некоторой паре вершин инцидентно несколько ребер, то все эти ребра называются *кратными*;
- если некоторой вершине инцидентно несколько петель, то все эти петли также называются *кратными*.

*Кратностью ребра  $e$*  называется количество всех ребер  $e'$ , для которых  $\partial(e') = \partial(e)$ . Ясно, что ребро  $e$  не является кратным тогда и только тогда, когда его кратность равна 1.

**Определение 1.4.** Граф без петель и кратных ребер называется *простым*.

**Замечание 1.5.** Чтобы задать простой граф, достаточно задать множество вершин  $V$  и некоторое подмножество  $E$  в  $V_2$ .

В самом деле, пусть  $G = (V, E, \partial)$  — простой граф. Тогда  $\partial$  отображает множество  $E$  взаимно-однозначно на некоторое подмножество в  $V_2$ , что позволяет отождествить  $E$  и  $\partial(E) \subset V_2$ . Иными словами, ребро простого графа однозначно задается парой различных вершин, которые оно соединяет.

Таким образом, *простой граф* — это пара  $(V, E)$ , где  $E$  — некоторое подмножество в  $V_2$ .

Для простого графа  $G = (V, E)$  ребро  $e = \{v, w\} \in E$  удобно обозначать через  $vw$  или  $wv$ .

**Пример 1.6.** Рассмотрим граф, изображенный на рис. 1.1 справа, и приведем примеры, иллюстрирующие введенную выше терминологию. Вершина  $v_1$  инцидентна ровно двум ребрам —  $e_2$  и  $e_7$ . Ребро  $e_1$  инцидентно только вершине  $v_7$ . Вершина  $v_1$  смежна с  $v_4$  и  $v_7$ , а с остальными вершинами не смежна. Ребро  $e_2$  смежно с  $e_7$ ,  $e_1$ ,  $e_3$  и  $e_6$ , а с остальными ребрами не смежно. Имеется ровно три петли:  $e_1$ ,  $e_3$  и  $e_4$ . Кратными являются: петли  $e_1$  и  $e_3$ ; ребра  $e_8$  и  $e_9$ . Кратности петель  $e_1$  и  $e_3$  равны 2, кратности ребер  $e_8$  и  $e_9$  также равны 2. Этот граф простым не является. Граф, приведенный на рисунке 1.1 слева, является простым.

Имеется большое количество задач, которые естественно решаются на языке теории графов.

**Задача 1.7** (Лемма о рукопожатиях). Некоторые участники конференции, здороваясь, пожимают друг другу руки. Докажите, что число участников, каждый из которых совершил нечетное число рукопожатий, — четно.

Решение этой задачи использует понятие степени вершины и одну очень полезную формулу.

**Определение 1.8.** Пусть  $v$  — произвольная вершина некоторого графа. Тогда *степенью*  $\deg v$  этой вершины называется количество инцидентных  $v$  ребер, не являющихся петлями, плюс удвоенное количество петель, инцидентных  $v$ .

Вычислим сумму степеней всех вершин графа. Заметим, что каждое ребро вносит в эту сумму вклад, равный 2, поэтому

$$2e = \sum_{v \in V} \deg v,$$

где  $e$  — число ребер графа  $G$ . Обозначим через  $v_k$  количество вершин степени  $k$ . Тогда сумму степеней всех вершин можно записать в виде  $\sum_{k=0}^{\infty} k v_k$ . Таким образом, имеет место важная формула:

$$(1.1) \quad 2e = \sum_{k=0}^{\infty} k v_k.$$

**Решение задачи 1.7.** Рассмотрим граф  $G$ , который очевидным образом описывает рукопожатия: за вершины принимаем участников конференции, за ребра — все рукопожатия. При этом считаем, что ребро-рукопожатие инцидентно тем вершинам-участникам, которые это рукопожатие совершили. Тогда в задаче требуется доказать, что в нашем графе количество вершин с нечетными степенями четно. Иными словами, требуется доказать, что число  $\sigma_1 = v_1 + v_3 + v_5 + \dots$  четно.

Воспользуемся формулой (1.1):

$$(1.2) \quad 2e = \sum_{k=0}^{\infty} k v_k = \sum_{k=0}^{\infty} 2k v_{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} (2k - 1) v_{2k-1}.$$

Из нее следует, что число  $1v_1 + 3v_3 + 5v_5 + \dots$  четно. Теперь заметим, что оно отличается от числа  $\sigma_1$  на четное число  $2v_3 + 4v_5 + 6v_7 + \dots$ , следовательно  $\sigma_1$  само четно.

**Замечание 1.9.** Разберитесь, учитывает ли приведенное выше решение ситуацию, когда какие-то пары участников конференции здоровались несколько раз.

Отметим, что в теории графов имеется много интересных задач, решения которых основаны на вычислении различных соотношений между числовыми характеристиками графов. Несколько таких задач даны в виде упражнений в конце этой главы.

## 1.2 Эйлеровы графы

Следующий круг вопросов связан с обходами графов. Вот пример классической задачи, которую решил Л. Эйлер, и с которой, как считается, берет начало теория графов.

**Задача 1.10 (Задача Эйлера).** В городе Кёнигсберге на реке Прегель имеется 7 мостов (их расположение показано рис. 1.2 слева). Можно ли, выйдя из дома, вернуться назад, пройдя каждый мост ровно один раз?

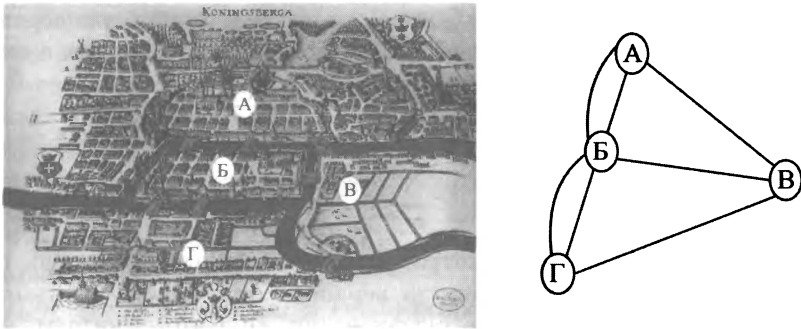


Рис. 1.2: Старинная карта Кёнигсберга. Буквами обозначены части города: А — Альтштадт, Б — Кнайпхоф, В — Ломзе, Г — Форштадт. Цифрами обозначены мосты (в порядке строительства): 1 — Лавочный, 2 — Зелёный, 3 — Рабочий, 4 — Кузнечный, 5 — Деревянный, 6 — Высокий, 7 — Медовый

Эйлер изобразил части суши точками, а мосты — линиями, соединяющими эти точки и, таким образом, сформулировал эту задачу в терминах теории графов.

Теперь нам нужно ввести ряд новых понятий.

**Определение 1.11.** *Маршрутом, соединяющим вершины  $v_0$  и  $v_k$ , называется последовательность  $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k$ , где  $v_i$  — вершины графа, а  $e_i$  — его ребра, причем для каждого  $i$  ребро  $e_i$  соединяет вершины  $v_{i-1}$  и  $v_i$ . Маршрут называется *замкнутым*, если  $v_0 = v_k$ . В обоих рассмотренных случаях число  $k$  называется *длиной маршрута*. Если в маршруте все вершины различны, то такой маршрут называется *путем*. Если же в замкнутом маршруте различны все ребра  $e_i$ , то такой маршрут называется *циклом*. Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить некоторым маршрутом.*

**Замечание 1.12.** Если  $G$  — простой граф, то маршрут из определения 1.11 записывается как  $v_0 v_1 \dots v_k$  (без указания ребер и без разделения запятыми).

**Пример 1.13.** Приведем пример маршрута в графе на рис. 1.1:

$$\gamma = v_7, e_3, v_7, e_6, v_4, e_9, v_3, e_8, v_4, e_7, v_1, e_7, v_4.$$

Этот маршрут выходит из вершины  $v_7$  и проходит сначала по одной из кратных петель, а именно, по  $e_3$ ; затем идет по ребру  $e_6$  кратности 1

в вершину  $v_4$ ; оттуда отправляется по одному из кратных ребер в  $v_3$  и возвращается назад по другому из кратных ребер в  $v_4$ ; затем он идет по ребру  $e_7$  кратности 1 в вершину  $v_1$  и сразу возвращается по этому же ребру назад в вершину  $v_4$ . Тем самым при движении по маршруту допустимы всевозможные самопересечения. Этот маршрут не является замкнутым, так как начинается и заканчивается в разных вершинах. Но если его продолжить, добавив  $e_6, v_7$ , то он станет замкнутым. Длина незамкнутого маршрута  $\gamma$  равна 6, а длина замкнутого маршрута  $\gamma, e_6, v_7$  равна 7.

В  $\gamma$  имеются совпадающие вершины, поэтому  $\gamma$  путем не является. Заметим, что в путь не может входить петля, а также путь не может содержать несколько ребер, соединяющих одни и те же вершины. Вот пример пути:  $v_1, e_2, v_7, e_6, v_4, e_9, v_3$ , причем этот путь имеет длину 3 и является максимальным в силу того, что его нельзя продолжить до более длинного пути.

Определенный выше замкнутый маршрут  $\gamma, e_6, v_7$  не является циклом, потому что в нем некоторые ребра встречаются несколько раз (таким является ребро  $e_7$ ). Примером цикла служит

$$v_7, e_3, v_7, e_6, v_4, e_9, v_3, e_8, v_4, e_7, v_1, e_2, v_7.$$

Рассматриваемый граф не является связным, так как, скажем, вершины  $v_6$  и  $v_7$  маршрутом не соединяются. Однако если выкинуть из этого графа вершины  $v_5, v_6$ , вместе с ребрами  $e_4$  и  $e_5$ , то оставшийся граф будет связным.

**Определение 1.14.** Цикл в связном графе называется *эйлеровым* или *обходом графа*, если он содержит все ребра графа. Граф, для которого существует эйлеров цикл, называется *эйлеровым графом*.

Эйлеров граф можно нарисовать на плоском листе бумаги, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя по одному ребру дважды (при этом некоторые вершины могут проходиться по несколько раз).

Итак, в задаче 1.10 спрашивается, существует ли для графа, изображенного на рис. 1.2 справа, эйлеров цикл, т.е. является ли этот граф эйлеровым. Мы решим общую задачу, из которой мгновенно вытекает, что в задаче 1.10 ответ отрицательный.

**Теорема 1.15** (Критерий эйлеровости графа). *Связный граф эйлеров, если и только если степени всех его вершин четны.*

*Доказательство.* Заметим сначала, что выкидывание петли сохраняет связность графа, четности степеней его вершин, а также свойство



графа содержать эйлеров цикл. Таким образом, мы будем сразу предполагать, что рассматриваемые графы не имеют петель. Заметим также, что, по определению, эйлеровы циклы существуют лишь в связных графах.

Предположим, что граф содержит эйлеров цикл, и представим себе, что мы обходим ребра графа по этому циклу. Рассмотрим произвольную вершину  $v$ . Тогда ребро, по которому мы зашли в  $v$ , и следующее ребро, по которому мы из  $v$  вышли, образуют пару. Кроме того, так как все ребра цикла различны, любые две таких пары ребер не пересекаются, поэтому все инцидентные  $v$  ребра разбиваются на непересекающиеся пары смежных ребер эйлерова цикла. Следовательно, степень вершины  $v$  четна.

Для доказательства обратного утверждения покажем сначала, что в любом графе, содержащем хотя бы одно ребро, и в котором степени вершин четны, имеется цикл. Действительно, начнем с произвольного ребра  $e_1$ , соединяющего вершины  $v_0$  и  $v_1$ . В силу четности степени вершины  $v_1$ , существует ребро  $e_2 \neq e_1$ , соединяющее  $v_1$  с некоторой вершиной  $v_2$ . Если  $v_2$  совпала с  $v_0$ , то получили цикл. Иначе продолжим процесс. В силу конечности числа вершин, на некотором шаге добавленная вершина совпадет с одной из уже имеющихся, и мы получим искомый цикл.

Выкинув этот цикл из графа, вновь получим граф, степени вершин которого четны. Таким образом, каждый граф из условия задачи можно представить в виде объединения реберно непересекающихся циклов. Для каждого цикла существует другой из этого семейства, который с ним пересекается (так как граф связный). Два реберно непересекающихся цикла, имеющих общую вершину, всегда объединяются в один: достаточно стартовать с общей вершины, пройти сначала один цикл, а затем другой. Таким образом, мы объединим все найденные циклы в один и получим эйлеров цикл.  $\square$

**Задача 1.16.** Докажите, что если в связном графе существует маршрут, проходящий через каждое ребро в точности один раз, то либо этот маршрут является эйлеровым циклом, либо в графе существуют в точности две вершины нечетной степени, остальные вершины имеют четную степень, а маршрут начинается и заканчивается в вершинах с нечетными степенями.

## 1.3 Гамильтоновы графы

Обсудим еще одну задачу, связанную с обходами. Предварительно дадим необходимые определения.

**Определение 1.17.** Цикл называется *простым*, если все его вершины (кроме первой и последней) различны. Простой цикл, проходящий через все вершины графа, называется *гамильтоновым*. Граф, содержащий некоторый гамильтонов цикл, называется *гамильтоновым*.

Задача о поиске гамильтонова цикла была предложена У. Гамильтоном в 1859 году в форме игры, которая называлась “Кругосветное путешествие”. Рассмотрим граф, изображенный на рис. 1.3, вершинам которого будем представлять городами, а ребра — соединяющими города дорогами. Требуется, начав с некоторого города и переходя от одного города к другому по имеющимся дорогам, посетить каждый город ровно один раз и вернуться в исходный.

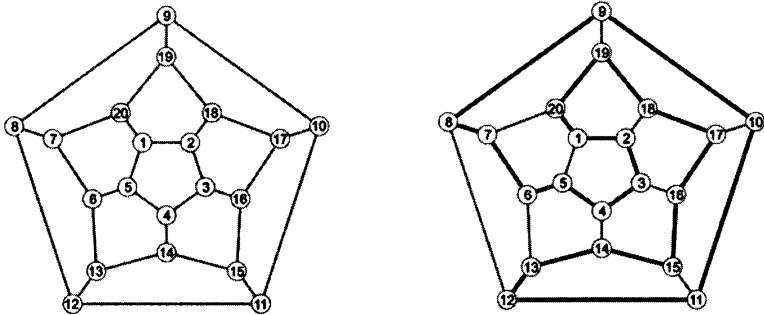


Рис. 1.3: Игра “Кругосветное путешествие”, предложенная У. Гамильтоном

Приведем ряд простых замечаний.

- (1) Каждый гамильтонов граф — связный.
- (2) Если гамильтонов цикл проходит через петлю, то в этом графе имеется ровно одна вершина; обратно, гамильтоновы графы с одной вершиной — это всевозможные графы с одной вершиной, имеющие одну или более петель. Таким образом, если гамильтонов граф  $G$  содержит более одной вершины, то ни один его гамильтонов цикл не проходит ни через одну петлю; поэтому

граф, полученный из  $G$  выбрасыванием всех его петель, — также гамильтонов.

- (3) Если гамильтонов цикл содержит два ребра, соединяющих одну и ту же пару вершин, то такой граф имеет ровно две вершины; обратно, каждый граф, имеющий ровно две вершины и такой, что эти вершины соединены не менее чем двумя ребрами, является гамильтоновым. Таким образом, если гамильтонов граф  $G$  содержит более двух вершин, то в его гамильтонов цикл не могут входить два ребра, соединяющих одну и ту же пару вершин; поэтому граф, полученный из  $G$  выбрасыванием из каждого семейства ребер, соединяющих одну и ту же пару вершин, всех ребер, кроме одного, — также гамильтонов.

Таким образом, произвольный граф  $G$ , содержащий не менее трех вершин, гамильтонов тогда и только тогда, когда гамильтоновым является граф  $G'$ , полученный из  $G$  отбрасыванием всех петель, а также выбрасыванием из каждого семейства ребер, соединяющих одну и ту же пару вершин, всех ребер, кроме одного. Граф  $G'$  простой по определению.

*Итак, при изучении гамильтоновых графов можно ограничиться простыми графами.*

*Полным графом  $K_n$  называется простой граф с  $n$  вершинами, в котором каждая пара вершин смежна, т.е. любые две различные вершины соединены единственным ребром.*

- (4) Полный граф  $K_n$  при  $n \geq 3$  является гамильтоновым.

Отметим, что до сих пор не известно ни одного критерия, описывающего гамильтоновы графы. Многочисленные условия, являющиеся по отдельности или необходимыми, или достаточными, можно, например, найти в [1] или [2]. Приведем одно из этих условий.

**Теорема 1.18 (Дирак).** *Пусть  $G = (V, E)$  — простой граф с  $n \geq 3$  вершинами. Предположим, что степени вершин графа  $G$  не меньше  $n/2$ . Тогда граф  $G$  гамильтонов, в частности, граф  $G$  — связный.*

*Доказательство.* Пусть  $\gamma = v_0 v_1 \cdots v_\ell$  — путь в графе  $G$ , имеющий максимально возможную длину среди всех путей в  $G$ . Покажем, что  $G$  содержит цикл  $C$  длины  $\ell + 1$ .

Если в графе есть ребро  $v_0 v_\ell$ , то в качестве  $C$  мы возьмем цикл  $v_0 v_1 \cdots v_\ell v_0$ .

Пусть теперь  $v_0 v_\ell \notin E$ . Положим

$$X = \{v_i : v_0 v_{i+1} \in E\}, \quad Y = \{v_i : v_\ell v_i \in E\}.$$

Обратите внимание на сдвиг индекса в определении множества  $X$ . Из-за него, например,  $v_0 \in X$ , но  $v_\ell, v_{\ell-1} \notin X$ . Также легко видеть, что  $v_0, v_\ell \notin Y$ .

Заметим, что каждая смежная с  $v_0$  вершина  $w$  графа  $G$  лежит на  $\gamma$ , так как иначе  $wv_0v_1 \dots v_\ell$  — путь в  $G$  длины  $\ell + 1$ , что противоречит максимальности длины пути  $\gamma$ . Теперь нетрудно понять, что множество вершин, смежных с  $v_0$ , и множество  $X$  содержат одинаковое количество элементов, т.е.  $|X| = \deg v_0 \geq n/2$ . Здесь и далее через  $|Z|$  обозначается количество элементов множества  $Z$ . Аналогично, множество вершин, смежных с  $v_\ell$ , т.е. множество  $Y$ , также содержится во множестве вершин пути  $\gamma$ , поэтому  $|Y| = \deg v_\ell \geq n/2$ . Следовательно,  $|X| + |Y| \geq n$ .

Теперь докажем, что множества  $X$  и  $Y$  пересекаются. Напомним, что вершина  $v_\ell$  не принадлежит ни  $X$ , ни  $Y$ , поэтому  $v_\ell \notin X \cup Y$  и, значит,  $X \cup Y \neq V$ , откуда  $|X \cup Y| < n$ . Но тогда если бы  $X$  и  $Y$  не пересекались, то выполнялось бы равенство  $|X \cup Y| = |X| + |Y|$ . Учитывая доказанные выше неравенства, мы получили бы  $n > |X \cup Y| = |X| + |Y| \geq n$ . Следовательно, множества  $X$  и  $Y$  пересекаются.

Пусть  $v_k \in X \cap Y$ . Ранее мы показали, что  $v_\ell, v_{\ell-1} \notin X$ ; кроме того,  $v_0 \notin Y$ . Поэтому  $0 < k < \ell - 1$ .

Искомый цикл  $C$  строится следующим образом, см. рис. 1.4. Сначала из  $v_0$  вдоль пути  $\gamma$  идем в вершину  $v_k$ , из нее по ребру  $v_k v_\ell$  (оно существует, так как  $v_k \in Y$ ) идем в  $v_\ell$ , затем по  $\gamma$  идем в обратном

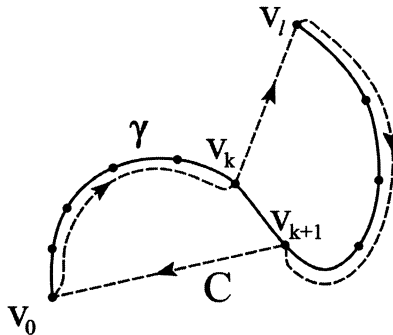


Рис. 1.4: Построение цикла  $C$

направлении из  $v_\ell$  в  $v_{k+1}$ , наконец, соединяем  $v_{k+1}$  с  $v_0$  ребром  $v_{k+1}v_0$  (оно существует, так как  $v_k \in X$ ). Легко видеть, что длина построенного цикла  $C$  равна  $\ell + 1$ .

Докажем теперь, что цикл  $C$  — гамильтонов. Предположим противное, т. е. что существует вершина  $x \in V$ , через которую  $C$  не проходит. Покажем, что  $x$  должна быть смежна с некоторой вершиной  $v_p$  из  $C$ . Действительно, если это не так, то вне цикла  $C$  лежит вершина  $x$  и не менее чем  $n/2$  смежных с  $x$  вершин, т.е. не менее  $n/2 + 1$  вершина. С другой стороны, вершина  $v_0$  и не менее чем  $n/2$  смежных в  $v_0$  вершин лежат в  $C$ , поэтому  $C$  содержит не менее  $n/2 + 1$  вершины. Таким образом, в графе  $G$  содержится не менее  $n + 2 > n$  вершин, противоречие.

Итак,  $x$  и некоторая  $v_p$  смежны, и тогда путь, полученный из  $xv_p \cup C$  выкидыванием любого их двух ребер цикла  $C$ , инцидентных  $v_p$ , будет иметь длину  $\ell + 1$ , что противоречит предположению о максимальной длине  $\ell$ . Полученное противоречие показывает, что такая вершина  $x$  не существует и, значит,  $C$  проходит через все вершины графа  $G$ , т. е.  $C$  — гамильтонов цикл.  $\square$

## Литература к главе 1

- [1] Емеличев В.А. и др. *Лекции по теории графов*, М.: Ленанд/URSS, 2015.
- [2] Graham R.L., Groetschel M., Lovasz L. *Handbook of combinatorics*, Elsevier, 1995, vol. 1.

## Упражнения к главе 1

**Упражнение 1.1.** Покажите, что в любой компании имеется не менее двух человек, у которых количества знакомых одинаковы.

**Упражнение 1.2.**

- (1) Города страны соединены авиалиниями. Из столицы выходит 21 линия, из города Дальний — одна, а из каждого из остальных городов — по двенадцать линий. Докажите, что из столицы можно долететь до города Дальний (возможно, с пересадками).
- (2) Покажите, что если в графе имеется ровно две вершины нечетной степени, то их можно соединить маршрутом.

- (3) Турист, который приехал в Москву на поезде, весь день гулял по городу. Поужинав на Манежной площади, он решил вернуться на вокзал, следуя по тем улицам, которые уже проходил нечетное число раз. Докажите, что такое возвращение возможно.

**Упражнение 1.3.** В компании, состоящей из пяти человек, среди любых трех человек найдутся двое знакомых и двое незнакомых друг с другом. Докажите, что компанию можно рассадить за круглым столом так, чтобы по обе стороны от каждого человека сидели его знакомые.

**Упражнение 1.4.** Известно, что в компании, состоящей не менее чем из четырех человек, каждый человек знаком не менее, чем с половиной присутствующих. Докажите, что можно выбрать из компании четырех человек и рассадить их за круглым столом так, что каждый из них будет сидеть рядом со своими знакомыми.

**Упражнение 1.5.**

- (1) В парке “Лотос” невозможно найти такой маршрут для прогулок по его дорожкам, который начинается и оканчивается в одной и той же точке и каждую дорожку парка содержит не более раза. Докажите, что некоторые дорожки парка приводят в тупик.
- (2) Вершина степени 1 называется *висячей*. Связный граф без циклов называется *деревом*. Докажите, что в каждом дереве, содержащем хотя бы одно ребро, имеется висячая вершина.

**Упражнение 1.6.**

- (1) Вычислите соотношение между числом вершин и ребер произвольного дерева.
- (2) Администрация парка “Лотос” решила провести реконструкцию освещения парка. По новому проекту каждый перекресток и тупик должен будет освещаться четырьмя светильниками, а аллея, соединяющая два перекрестка или перекресток и тупик — шестью. Сколько светильников будет установлено, если в парке 18 перекрестков и тупиков.

**Упражнение 1.7.** *Насыщенным углеводородом* называется соединение углерода  $C$ , имеющего валентность 4, и водорода  $H$ , имеющего валентность 1, в котором при заданном числе атомов углерода содержится наибольшее число атомов водорода. Найдите формулу насыщенного углеводорода, содержащего  $n$  атомов углерода.



**Упражнение 1.8.** Докажите, что если в связном графе существует маршрут, проходящий через каждое ребро в точности один раз, то либо этот маршрут является эйлеровым циклом, либо в графе существуют в точности две вершины нечетной степени, остальные вершины имеют четную степень, а маршрут начинается и заканчивается в вершинах с нечетными степенями.

**Упражнение 1.9.** На пир при дворе короля Артура собралось четное число рыцарей, которые либо дружат, либо враждуют. Оказалось, что у каждого из рыцарей друзей больше, чем врагов. Доказать, что волшебник Мерлин может так рассадить рыцарей за круглым столом, что справа и слева от каждого из них будет сидеть друг.

# Глава 2

## ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ

**План.** Непрерывная функция на прямой, база окрестностей, непрерывное в точке отображение, непрерывное отображение, открытое множество, окрестность точки, топология, топологическое пространство, база топологического пространства, индуцированная база окрестностей, индуцированная топология, гомеоморфизм, гомеоморфные топологические пространства, непрерывная кривая, линейно связное топологическое пространство, линейно связная компонента, локально постоянная функция, открытое покрытие топологического пространства, открытое покрытие подмножества топологического пространства, подпокрытие, компактность, замкнутое подмножество, ограниченное подмножество  $\mathbb{R}^n$ .

В следующей лекции мы обратимся к одной из важнейших теорем о свойствах плоскости — к теореме Жордана. Она утверждает, что непрерывная замкнутая несамопересекающаяся кривая на плоскости разбивает плоскость на две части. Имеется несколько доказательств этого факта, но ни одно нельзя назвать простым. Мы ограничимся подробным рассмотрением случая, когда кривая является ломаной, но даже в этом случае нам придется подготовиться, чтобы дать строгое обоснование. Прежде всего нам нужно познакомиться с основами топологии — раздела математики, изучающего понятие непрерывности. Более детальное изложение основ топологии можно найти, например, в [1] и [2].

### 2.1 Топологические пространства и непрерывные отображения

Напомним определение непрерывной функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  из курса математического анализа. Обозначим через  $U_\varepsilon(x)$  интервал  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ . Напомним, что  $U_\varepsilon(x)$  также принято называть  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $x$ .

**Определение 2.1.** Функция  $f$  называется *непрерывной на  $\mathbb{R}$* , если

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(U_\delta(x)) \subset U_\varepsilon(f(x)).$$

Часто вместо  $\varepsilon$ -окрестностей некоторой точки бывает полезно рассматривать произвольные интервалы, содержащие эту точку. Следующее определение эквивалентно приведенному выше.

**Определение 2.2.** Функция  $f$  называется *непрерывной на  $\mathbb{R}$* , если

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall (a, b) \ni f(x) \exists (c, d) \ni x : f((c, d)) \subset (a, b).$$

При доказательстве основных свойств непрерывных функций, например, теорем о непрерывности композиции, суммы (разности) и произведения непрерывных функций, использовались некоторые свойства  $\varepsilon$ -окрестностей точек. Что это за свойства? Если бы мы могли их выделить и точно сформулировать, можно было бы рассматривать непрерывные функции не только на  $\mathbb{R}$  (и не только на отрезках и интервалах).

Оказывается, эти свойства очень простые. Они отражены в следующем определении.

### 2.1.1 База окрестностей

**Определение 2.3.** Пусть  $X$  — произвольное множество. Семейство множеств  $\beta$ , состоящее из некоторых подмножеств  $X$ , называется *базой окрестностей*, если

- (1) каждая точка  $x \in X$  содержится в некотором  $U \in \beta$ ;
- (2) для любых двух пересекающихся  $U, V \in \beta$  и любой точки  $x \in U \cap V$  найдется такое  $W \in \beta$ , что  $x \in W \subset U \cap V$ .

**Пример 2.4.** (1) Пусть  $X$  — вещественная прямая  $\mathbb{R}$ . В качестве рассмотрим семейство всех интервалов  $(a, b)$ . Тогда каждая точка из  $\mathbb{R}$  лежит в некотором интервале, и если  $(a, b) \cap (c, d) \neq \emptyset$ , то это пересечение представляет собой интервал  $(\max\{a, c\}, \min\{b, d\})$ , так что  $\beta$  — база окрестностей, см. рис. 2.1, слева.

(2) Пусть теперь  $X$  — вещественная плоскость  $\mathbb{R}^2$ . Расстояние между двумя точками  $P = (P_1, P_2)$  и  $Q = (Q_1, Q_2)$  вычисляется по теореме Пифагора:

$$|PQ| = \sqrt{(P_1 - Q_1)^2 + (P_2 - Q_2)^2}.$$



Рис. 2.1: Базы окрестностей на прямой и плоскости

Будем называть *открытым кругом*  $U_r(P)$  множество

$$U_r(P) = \{Q \in X : |PQ| < r\}.$$

Отметим, что, в отличие от интервалов, пересечение открытых кругов, вообще говоря, не является открытым кругом. Тем не менее, если  $S \in U_a(P) \cap U_b(Q)$ , то, положив  $c = \min\{a - |SP|, b - |SQ|\}$ , получим  $S \in U_c(S) \subset U_a(P) \cap U_b(Q)$ , см. рис. 2.1, справа. Таким образом, семейство открытых кругов образует базу окрестностей плоскости.

(3) Предыдущий пример естественным образом обобщается на случай, когда  $X$  — это  $n$ -мерное вещественное пространство  $\mathbb{R}^n$ . Здесь расстояние определяется с помощью обобщенной теоремы Пифагора: если  $P = (P_1, \dots, P_n)$  и  $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$ , то

$$|PQ| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (P_i - Q_i)^2}.$$

Определение открытого круга, а также рассмотренное в предыдущем примере свойство пересекающихся открытых кругов дословно переносятся на этот случай. Теперь же множества  $U_r(P)$  называются *открытыми шарами*. Тем самым семейство открытых шаров в  $\mathbb{R}^n$  образуют базу окрестностей.

(4) Пусть  $X$  — это отрезок  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Рассмотрим семейство подмножеств  $X$ , состоящее из всех интервалов вида  $(c, d) \subset [a, b]$ , а также полуинтервалов вида  $[a, d) \subset [a, b]$  и  $(c, b] \subset [a, b]$ . Ясно, что каждое непустое пересечение интервала с интервалом или полуинтервалом также является интервалом; пересечение двух полуинтервалов одного типа, скажем  $[a, d_1)$  и  $[a, d_2)$ , — также является полуинтервалом; пересечение полуинтервалов разных типов — интервал. И, конечно же, каждая точка из  $[a, b]$  лежит в некотором интервале или полуинтервале. Таким образом, определенное только что семейство образует базу окрестностей отрезка.

Введенное понятие базы дает возможность в самом общем виде определить понятия непрерывного отображения и открытого множества.

### 2.1.2 Непрерывные отображения

**Определение 2.5.** Пусть  $\beta_X$  и  $\beta_Y$  — некоторые базы на множествах  $X$  и  $Y$ . Тогда отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется *непрерывным в точке*  $x \in X$ , если выполняется следующее условие: для любого множества  $V \in \beta_Y$ , содержащего точку  $f(x)$ , существует такое множество  $U \in \beta_X$ , содержащее точку  $x$ , что  $f(U) \subset V$ . Если отображение  $f$  непрерывно во всех точках  $x$ , то его называют *непрерывным отображением*.

**Замечание 2.6.** Ясно, что свойство отображения  $f: X \rightarrow Y$  быть непрерывным зависит от того, какие базы рассматриваются. Если нужно подчеркнуть, какие базы выбраны на  $X$  и  $Y$ , то пишут  $f: (X, \beta_X) \rightarrow (Y, \beta_Y)$ .

**Замечание 2.7.** Базы окрестностей, приведенные в примере 2.4, стандартно используются для описания непрерывных отображений из евклидова пространства или отрезка в другие евклидовы пространства и отрезки.

**Замечание 2.8.** Рассмотрим отображение  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , сопоставляющее каждому  $t \in [a, b]$  некоторую точку  $(x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$  и тем самым задающее функции  $x_i(t)$ , которые будем называть *координатными функциями отображения*  $\gamma$ . Непосредственно проверяется следующее несложное, но полезное утверждение.

**Предложение 2.9.** *Отображение  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все задаваемые им координатные функции.*

**Замечание 2.10.** Выбрав подходящим образом базы, можно построить довольно неожиданные примеры непрерывных или разрывных (не являющихся непрерывными) функций.

**Пример 2.11.** Рассмотрим множество  $\mathbb{R}$  и семейство его подмножеств  $\beta$ , состоящее из всевозможных лучей  $(a, +\infty)$ . Легко проверить, что  $\beta$  — база. Тогда функция  $f(x) = 2x$  непрерывна, но функция  $g(x) = -x$  непрерывной не является (проверьте), если рассматривать функции  $f$  и  $g$  как отображения из  $(\mathbb{R}, \beta)$  в  $(\mathbb{R}, \beta)$ .

### 2.1.3 Открытые множества и непрерывные отображения

**Определение 2.12.** Пусть дано пространство  $X$  с базой  $\beta$ . Будем называть подмножество  $U \subset X$  *открытым*, если для любой точки  $x \in U$  найдется такое  $V \in \beta$ , что  $x \in V \subset U$ . Пустое множество тоже будем считать открытым. Равносильное определение: непустое множество *открыто*, если оно является объединением некоторых элементов базы. Для каждой точки  $x \in X$  каждое открытое множество  $U$ , содержащее  $x$ , будем называть *окрестностью точки  $x$* .

Как нетрудно заметить, мы дали это определение по аналогии с открытым множеством на прямой. В терминах открытых множеств непрерывное отображение можно охарактеризовать следующим образом.

**Теорема 2.13.** Пусть на множествах  $X$  и  $Y$  заданы базы. Тогда отображение  $f: X \rightarrow Y$  непрерывно, если и только если для любого открытого  $V \subset Y$  его прообраз  $f^{-1}(V) \subset X$  также открыт.

Доказательство этой теоремы дословно повторяет доказательство аналогичного результата из курса математического анализа.

### 2.1.4 Топология и топологические пространства

**Определение 2.14.** Пусть на множестве  $X$  задана база  $\beta$ . Тогда семейство всех открытых множеств, порожденных этой базой, называется *топологией с базой  $\beta$*  или *топологией, порожденной базой  $\beta$* . Множество  $X$ , на котором задана топология, называется *топологическим пространством*. При этом  $\beta$  называется также *базой пространства  $X$* .

**Замечание 2.15.** Несложно проверяется, что каждая топология  $\tau$  на множестве  $X$  удовлетворяет следующим свойствам: в нее всегда входят  $\emptyset$  и все  $X$ ; кроме того, объединение любых элементов из  $\tau$ , а также пересечение каждого конечного набора элементов из  $\tau$ , содержится в  $\tau$ . Отметим, что в стандартных курсах начинают с определения топологии и топологического пространства.

**Определение 2.16.** Семейство  $\tau$  подмножеств множества  $X$  называется *топологией на  $X$* , если выполняются следующие условия:

- (1)  $\emptyset \in \tau$  и  $X \in \tau$ ;

- (2) если  $\{U_\alpha\}$  — произвольный набор элементов из  $\tau$ , то  $\cup U_\alpha \in \tau$  (семейство  $\tau$  замкнуто относительно операции объединения);
- (3) если  $\{U_i\}_{i=1}^N$  — произвольный **конечный** набор элементов из  $\tau$ , то  $\cap U_i \in \tau$  (семейство  $\tau$  замкнуто относительно конечных пересечений).

Множество  $X$ , вместе с определенной на нем топологией, называется *топологическим пространством*, а элементы из  $\tau$  — *открытыми множествами*.

Затем дают определение базы топологии.

**Определение 2.17.** Пусть  $\tau$  — некоторая топология на множестве  $X$ . Тогда  $\beta \subset \tau$  называется *базой топологии  $\tau$* , если каждое непустое открытое множество представимо в виде объединения некоторых элементов из  $\beta$ .

Для наших целей будет более удобно поступать так, как мы сделали, а именно, определять топологию через базу, так как при решении конкретных задач, например при доказательстве непрерывности, как правило используется именно база, а не вся топология.

Из теоремы 2.13 вытекает важный результат.

**Следствие 2.18.** Пусть  $\beta_X$  и  $\beta'_X$  — базы окрестностей на множестве  $X$ , порождающие одну и ту же топологию. Пусть  $\beta_Y$  и  $\beta'_Y$  — базы окрестностей на множестве  $Y$ , порождающие одну и ту же топологию. Тогда отображение  $f: (X, \beta_X) \rightarrow (Y, \beta_Y)$  непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывно  $f: (X, \beta'_X) \rightarrow (Y, \beta'_Y)$ .

В дальнейшем мы будем работать со стандартными базами в  $\mathbb{R}^n$ , но определения будем стараться давать для общих топологических пространств.

Следующими общими свойствами непрерывных отображений мы будем часто пользоваться. Их доказательства можно почти дословно заимствовать из математического анализа.

**Предложение 2.19.** (1) *Тождественное отображение топологического пространства в себя непрерывно.*

- (2) Пусть  $X, Y$  и  $Z$  — топологические пространства, а  $f: X \rightarrow Y$  и  $g: Y \rightarrow Z$  — непрерывные отображения. Тогда отображение  $g \circ f: X \rightarrow Z$  непрерывно.

- (3) Если  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  и  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывные функции, и  $\lambda$  — произвольное вещественное число, то следующие функции также непрерывны:  $\lambda f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f + g: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $fg: X \rightarrow \mathbb{R}$ , и если  $g(x) \neq 0$  при всех  $x \in X$ , то и  $f/g: X \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Следствие 2.20.** Пусть  $p$  — произвольная точка в  $\mathbb{R}^n$ . Для каждого  $x \in \mathbb{R}^n$  положим  $\rho_p(x) = |px|$ . Тогда  $\rho_p$  — непрерывная функция на  $\mathbb{R}^n$ .

*Доказательство.* Если  $p = (p_1, \dots, p_n)$  и  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , то  $\rho_p(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - p_i)^2}$ , т.е.  $\rho_p$  является композицией непрерывных функций, откуда и следует непрерывность  $\rho_p$ .  $\square$

### 2.1.5 Индуцированная топология

Пусть  $X$  — произвольное топологическое пространство с базой  $\beta$  топологии  $\tau$ . Имеется естественный способ превратить произвольное подмножество  $Y \subset X$  в топологическое пространство. Для этого достаточно заметить, что семейство  $\beta_Y = \{Y \cap B : B \in \beta\}$  представляет собой базу окрестностей (проверьте это) и, значит, порождает некоторую топологию  $\tau_Y$ .

**Определение 2.21.** Пусть  $Y \subset X$  — произвольное подмножество топологического пространства  $X$  с базой  $\beta$  топологии  $\tau$ . Тогда семейство  $\beta_Y = \{Y \cap B : B \in \beta\}$  называется базой окрестностей, индуцированной из  $X$ . Порожденная этой базой топология  $\tau_Y$  на  $Y$  также называется индуцированной из  $X$ .

**Замечание 2.22.** Индуцированная топология  $\tau_Y$  может быть получена непосредственно из топологии  $\tau$ , а именно,  $\tau_Y = \{Y \cap U : U \in \tau\}$  (проверьте).

**Пример 2.23.** Будем рассматривать плоскость как модель листа бумаги, тогда каждый рисунок, в частности, каждую букву можно представить как подмножество в  $\mathbb{R}^2$ . Описанная выше конструкция индуцированной топологии превращает все такие рисунки в топологические пространства. Так же получаются топологические пространства, соответствующие геометрическим фигурам, например ломаной, треугольнику, окружности, кругу и т.д.

**Пример 2.24.** Рассмотрим, как выглядит база окрестностей  $\beta$  отрезка  $[a, b]$ , индуцированная из стандартной базы окрестностей прямой  $\mathbb{R}$ . По определению, элементы из  $\beta$  являются пересечениями интервалов



прямой  $\mathbb{R}$  с отрезком  $[a, b]$ . Таким образом,  $\beta$  состоит из всех множеств, описанных в примере 2.4, а также из самого отрезка  $[a, b]$ , поэтому эта база окрестностей и база окрестностей из примера 2.4 порождают одинаковые топологии.

**Пример 2.25.** Пусть  $X$  — окружность  $x^2 + y^2 = 1$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$  с координатами  $x, y$ . Тогда индуцированную базу окрестностей будут составлять всевозможные пересечения окружности с открытыми кругами, т.е. открытые дуги окружности, и сама окружность.

## 2.2 Гомеоморфизм

**Определение 2.26.** Отображение  $f: X \rightarrow Y$  топологических пространств называется *гомеоморфизмом*, если  $f$  взаимно однозначно, а оба отображения  $f$  и  $f^{-1}$  непрерывны. Топологические пространства  $X$  и  $Y$  называются *гомеоморфными*, если существует гомеоморфизм  $f: X \rightarrow Y$ .

Из теоремы 2.13 вытекает, что если  $f: X \rightarrow Y$  — гомеоморфизм, то множество  $U \subset X$  открыто тогда и только тогда, когда открыто множество  $f(U) \subset Y$ . Таким образом, на гомеоморфизм  $f$  можно смотреть как на “переименование точек” в пространстве  $Y$ : если  $f(x) = y$ , то  $x$  можно воспринимать как новое имя точки  $y$ . При таком взгляде становится очевидно, что все топологические свойства гомеоморфных топологических пространств одинаковы. Поэтому топологические пространства принято рассматривать с точностью до гомеоморфизма.

**Замечание 2.27.** Из предложения 2.19 вытекает, что каждое пространство гомеоморфно само себе, и что если  $X$  гомеоморфно  $Y$ , а  $Y$  гомеоморфно  $Z$ , то и  $X$  гомеоморфно  $Z$ .

Обычно гомеоморфность двух пространств проще всего устанавливается явным предъявлением подходящего гомеоморфизма.

**Пример 2.28.** Покажем, что прямая  $\mathbb{R}$  и интервал  $(a, b)$  гомеоморфны. Действительно, в частном случае, когда  $(a, b) = (-\pi/2, \pi/2)$ , гомеоморфизм устанавливается функцией  $y = \operatorname{arctg} x$ , так как она и обратная к ней, равная ограничению функции  $x = \operatorname{tg} y$  на  $(-\pi/2, \pi/2)$ , являются непрерывными функциями, см. рис. 2.2.

В общем случае, интервал  $(a, b)$  сначала переводится гомеоморфно на интервал  $(-\pi/2, \pi/2)$  с помощью отображения вида  $y = kx + c$ , где  $k$  и  $c$  — некоторые вещественные числа (найдите явные выражения для  $k$  и  $c$ ); затем можно воспользоваться замечанием 2.27.

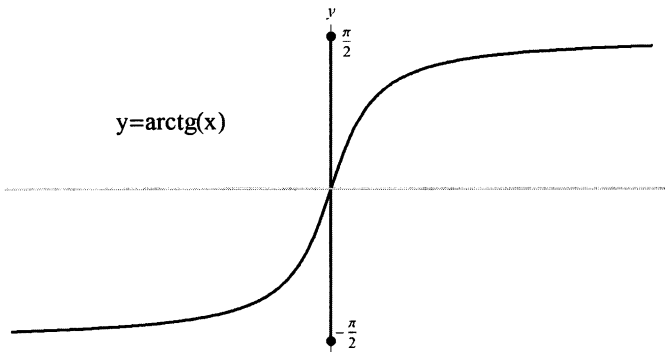


Рис. 2.2: Интервал гомеоморфен прямой

**Пример 2.29.** Рассмотрим на плоскости с координатами  $x, y$  окружность  $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ , и пусть  $X = S^1 \cap \{(x, y) : y \geq 0\}$  — замкнутая полуокружность. Тогда  $X$  гомеоморфно отрезку  $[-1, 1]$ . Для проверки достаточно представить отрезок  $[-1, 1]$  как подмножество оси  $x$ , рассмотреть взаимно однозначное отображение  $f: X \rightarrow [-1, 1]$ , положив  $f: (x, y) \mapsto x$ , и показать, что  $f$  — гомеоморфизм (сделайте это).

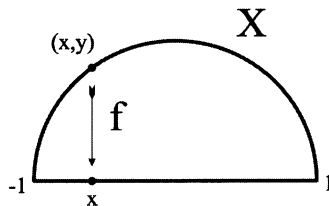


Рис. 2.3: Замкнутый полуокруг гомеоморфен отрезку

**Пример 2.30.** Если в примере 2.29 рассмотреть открытую полуокружность  $X = S^1 \cap \{(x, y) : y > 0\}$ , то аналогичное построение покажет, что  $X$  гомеоморфно интервалу  $(-1, 1)$ , а, значит, в силу примера 2.28 и замечания 2.27, открытая полуокружность гомеоморфна прямой.

**Пример 2.31.** На плоскости  $\mathbb{R}^2$  с координатами  $x, y$  рассмотрим кольцо  $X = \{(x, y) : a \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq b\}$ , где  $0 < a < b < \infty$ . Также в трехмерном пространстве  $\mathbb{R}^3$  с координатами  $(x, y, z)$  рассмотрим цилиндр

$Y = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, a \leq z \leq b\}$ . Тогда  $X$  и  $Y$  гомеоморфны. Для доказательства достаточно показать, что отображение  $f: X \rightarrow Y$ , заданное так:

$$f: (x, y) \mapsto \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sqrt{x^2 + y^2} \right),$$

является гомеоморфизмом (сделайте это).

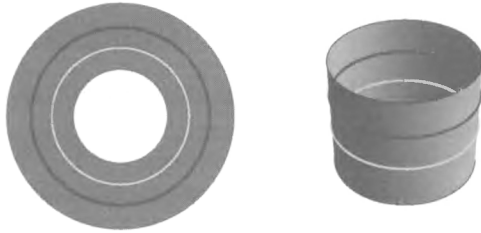


Рис. 2.4: Кольцо гомеоморфно цилиндру

**Пример 2.32.** Вырежем из бумаги прямоугольную ленту и склеим две противоположных стороны, предварительно перекрутив ленту на  $360^\circ$ , см. рис. 2.5. Тогда полученное топологическое пространство будет гомеоморфно обычному цилиндру (попробуйте это показать).

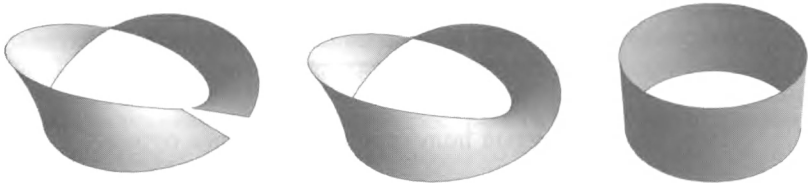


Рис. 2.5: Дважды перекрученная полоска гомеоморфна цилиндру

Проверка того, что данное отображение не является гомеоморфизмом, тоже обычно несложно. Следующий пример демонстрирует, что для гомеоморфности отображения может оказаться недостаточно его взаимной однозначности и непрерывности.

**Пример 2.33.** Отображение  $f$  из полуинтервала  $[0, 2\pi)$  в окружность  $\{x^2 + y^2 = 1\}$ , заданное формулой  $h: t \mapsto (\cos t, \sin t)$ , взаимно однозначно и непрерывно (проверьте!), но обратное к нему непрерывным не является, поэтому отображение  $f$  — не гомеоморфизм.

А вот доказать, что гомеоморфизма не существует вообще — это довольно непростая задача. Основной способ — сравнивать какие-то свойства или характеристики, которые у гомеоморфных пространств должны быть одинаковыми. Если какая-то из таких характеристик у двух данных пространств различается, то пространства не гомеоморфны. Если же эти характеристики совпадают, то ничего определенного сказать нельзя.

**Пример 2.34.** Приведем идею доказательства того, что буквы  $\Gamma$  и  $\Gamma$  не гомеоморфны (детали станут понятны позже, после того, как мы обсудим понятие линейной связности). Действительно, если бы существовал гомеоморфизм  $f: \Gamma \rightarrow \Gamma$ , то для любой точки  $x \in \Gamma$  ограничение  $f$  на  $\Gamma \setminus \{x\}$  было бы гомеоморфизмом с  $\Gamma \setminus \{f(x)\}$ . Однако если из  $\Gamma$  выкинуть точку крепления горизонтальной перекладины, то  $\Gamma$  распадется на три куска. Буква  $\Gamma$ , после выкидывания любой точки, распадается не более чем на два куска. “Количество кусков”, из которых состоит топологическое пространство, является топологическим свойством, которое тем самым сохраняется при гомеоморфизмах. Поэтому буквы  $\Gamma$  и  $\Gamma$  не гомеоморфны.

В следующих параграфах мы обсудим упоминавшееся уже понятие линейной связности, а также еще одну топологическую характеристику — компактность.

## 2.3 Линейная связность

**Определение 2.35.** *Непрерывной кривой* в топологическом пространстве  $X$  называется любое непрерывное отображение  $\gamma$  отрезка  $[a, b]$  в  $X$ . При этом говорят, что эта непрерывная кривая *соединяет точки*  $\gamma(a)$  и  $\gamma(b)$ .

**Определение 2.36.** Топологическое пространство  $X$  называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой.

Так как композиция непрерывных отображений — тоже непрерывное отображение, мгновенно получаем следующий результат.

**Предложение 2.37.** *Образ при непрерывном отображении линейно связного пространства — линейно связан.*

**Лемма 2.38.** *Пусть в топологическом пространстве  $X$  даны две непрерывные кривые  $\gamma_1: [a, b] \rightarrow X$  и  $\gamma_2: [b, c] \rightarrow X$ , причем  $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ . Тогда отображение  $\gamma: [a, c] \rightarrow X$ , которое на  $[a, b]$  совпадает с  $\gamma_1$ , а на  $[b, c]$  с  $\gamma_2$ , тоже является непрерывной кривой.*

*Доказательство.* Пусть  $\beta_X$  — какая-нибудь база топологии пространства  $X$ . Нам достаточно показать, что отображение  $\gamma$  непрерывно в точке  $b$ , т.е. для любого  $V \in \beta_X$ , содержащего  $\gamma(b)$ , существует такой интервал  $(b - \delta, b + \delta) \subset [a, c]$ , что его  $\gamma$ -образ содержится в  $V$ . Так как  $\gamma_i$  непрерывны в  $b$ , существуют полуинтервалы  $(b - \delta_1, b]$  и  $[b, b + \delta_2)$ , которые отображаются  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  соответственно в  $V$ . Но тогда достаточно положить  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ .  $\square$

**Теорема 2.39.** *Зафиксируем в топологическом пространстве  $X$  некоторую точку  $x_0$ . Тогда  $X$  линейно связно, если и только если любую точку можно соединить непрерывной кривой с  $x_0$ .*

*Доказательство.* Если  $X$  линейно связно, то утверждение теоремы мгновенно следует из определения линейной связности. Обратно, пусть  $y_1$  и  $y_2$  — произвольные точки из  $X$ , и пусть  $\gamma_i: [a_i, b_i] \rightarrow X$ ,  $\gamma_i(a_i) = y_i$ ,  $\gamma_i(b_i) = x_0$ ,  $i = 1, 2$ , — непрерывные кривые, соединяющие  $y_1$  и  $y_2$  с точкой  $x_0$ . Рассмотрим кривую  $\gamma'_2(t) = \gamma_2(b_1 + b_2 - t)$ . Тогда  $\gamma'_2$  определена на  $[b_1, b_1 + b_2 - a_2]$  и непрерывна как композиция непрерывных отображений. Кроме того,  $\gamma'_2$  по-прежнему соединяет  $x_0$  и  $y_2$ . Применяя лемму 2.38 к  $\gamma_1$  и  $\gamma'_2$ , получаем непрерывную кривую, соединяющую  $y_1$  и  $y_2$ . Таким образом, пространство  $X$  — линейно связно.  $\square$

**Определение 2.40.** *Линейно связное подмножество топологического пространства  $X$ , не содержащееся в отличном от него самого линейно связном подмножестве  $X$ , называется *линейно связной компонентой*  $X$ . Так как других компонент мы не используем<sup>1</sup>, в дальнейшем, для краткости, мы будем называть линейно связные компоненты просто *компонентами*.*

**Определение 2.41.** *Функция  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , заданная на топологическом пространстве, называется *локально постоянной*, если для каждой точки  $x \in X$  существует такая окрестность  $U$ , что  $f$  постоянна на  $U$ .*

<sup>1</sup>В топологии рассматривается и другое понятие, называемое *связностью*, а также *связные компоненты*, см. [1] или [2].

**Предложение 2.42.** *Локально постоянная функция непрерывна.*

*Доказательство.* Пусть  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  — локально постоянная функция, и  $\beta$  — некоторая база топологии на  $X$ . Тогда для каждой  $x \in X$  существует окрестность  $B \in \beta$  точки  $x$ , на которой  $f$  постоянна и, значит, равна  $f(x)$ . Но это означает, что для любого  $x \in X$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $B$ , что  $f(B) \subset (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$ , поэтому  $f$  непрерывна.  $\square$

Хотя приводимое ниже следствие имеет место для произвольной локально постоянной функции, мы сформулируем и докажем его при дополнительном предположении о ее множестве значений — это упростит доказательство.

**Следствие 2.43.** *Пусть локально постоянная функция принимает не более чем счетное число значений. Тогда она постоянна на каждой компоненте.*

*Доказательство.* Пусть  $x$  и  $y$  — произвольные точки из компоненты, т.е. существует непрерывная кривая  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ , для которой  $x = \gamma(a)$  и  $y = \gamma(b)$ . Так как локально постоянная функция непрерывна по предложению 2.42, и композиция непрерывных отображений непрерывна, функция  $g(t) = f(\gamma(t))$  также непрерывна. Однако, если  $g(a) \neq g(b)$ , то  $g$  принимает все промежуточные значения, которых континуум, противоречие.  $\square$

Обоснованием следующих примеров являются упражнения 2.6–2.9 в конце главы.

**Пример 2.44.** Пусть  $X$  — подмножество плоскости  $\mathbb{R}^2$ , которое получается из  $\mathbb{R}^2$  выбрасыванием оси  $x$ . Тогда  $X$  состоит из двух компонент — открытых полуплоскостей  $\{(x, y) : y < 0\}$  и  $\{(x, y) : y > 0\}$ .

**Пример 2.45.** Пусть  $X$  — подмножество плоскости  $\mathbb{R}^2$ , которое получается из  $\mathbb{R}^2$  выбрасыванием двух лучей, выходящих из одной точки. Тогда  $X$  состоит из двух компонент.

**Пример 2.46.** Пусть  $X$  — подмножество плоскости  $\mathbb{R}^2$ , которое получается из некоторого круга выбрасыванием произвольного его радиуса. Тогда  $X$  — линейно связное пространство.

**Пример 2.47.** Пусть  $X$  — подмножество плоскости  $\mathbb{R}^2$ , которое получается из некоторого круга выбрасыванием двух различных его радиусов. Тогда  $X$  состоит из двух компонент.

## 2.4 Компактность

**Определение 2.48.** *Открытым покрытием топологического пространства  $X$  называется такое семейство  $\{U_\alpha\}$  открытых в  $X$  множеств, что  $X = \cup_\alpha U_\alpha$ . Открытым покрытием подмножества  $Y$  топологического пространства  $X$  называется такое семейство  $\{U_\alpha\}$  открытых в  $X$  множеств, что  $Y \subset \cup_\alpha U_\alpha$ . Подпокрытием называется произвольное подсемейство покрытия, само являющееся покрытием.*

**Определение 2.49.** Топологическое пространство  $X$  (подмножество  $Y$  топологического пространства  $X$ ) называется *компактным*, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

**Пример 2.50.** Как показывается в математическом анализе, отрезок  $[a, b]$  компактен.

**Определение 2.51.** Подмножество  $Y$  топологического пространства  $X$  называется *замкнутым*, если его дополнение  $X \setminus Y$  — открыто в  $X$ .

**Пример 2.52.** Отрезок  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  — замкнутое подмножество прямой. Действительно, положим  $U = \mathbb{R} \setminus [a, b]$ . Выберем произвольную точку  $x \in U$  и пусть  $\varepsilon = \min\{|xa|, |xb|\}$ , тогда интервал  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  не пересекает  $[a, b]$  и, значит, лежит в  $U$ , так что  $U$  — открыто.

**Пример 2.53.** Полуинтервал  $[a, b)$  не является замкнутым. Действительно, точка  $b$  лежит в дополнении  $\mathbb{R} \setminus [a, b)$ , но для каждого  $\varepsilon > 0$  интервал  $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$  пересекает  $[a, b)$ .

**Определение 2.54.** Подмножество  $Y \subset \mathbb{R}^n$  называется *ограниченным*, если оно лежит в некотором шаре  $U_r(P)$ .

Следующее важное утверждение, являющееся критерием компактности подмножества евклидова пространства, будет доказано в курсе математического анализа.

**Теорема 2.55.** *Подмножество  $Y$  в  $\mathbb{R}^n$  компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

**Предложение 2.56.** *Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение топологических пространств. Предположим, что  $X$  компактно. Тогда  $f(X)$  — компактное подмножество  $Y$ .*

*Доказательство.* Пусть  $\{U_\alpha\}$  — произвольное открытое покрытие множества  $f(Y)$ , тогда  $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$  — открытое покрытие компакта  $X$ , поэтому в нем существует некоторое конечное подпокрытие. Но тогда те

$U_\beta$ , для которых множества  $f^{-1}(U_\beta)$  образуют это конечное подпокрытие, сами образуют конечное подпокрытие в  $\{U_\alpha\}$ .  $\square$

**Следствие 2.57.** *Образ непрерывной кривой в  $\mathbb{R}^n$  компактен и, значит, замкнут и ограничен.*

*Доказательство.* Это следует из компактности отрезка (пример 2.50), предложения 2.56 и теоремы 2.55.  $\square$

**Следствие 2.58.** *Пусть  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция на компактном топологическом пространстве. Тогда функция  $f$  ограничена и принимает свои наименьшее и наибольшее значения.*

*Доказательство.* Действительно, в силу предложения 2.56, множество  $f(X) \subset \mathbb{R}$  компактно, следовательно, по теореме 2.55, оно замкнуто и ограничено. Ограниченность множества  $f(X)$  означает ограниченность функции  $f$ . Замкнутость множества  $f(X)$  означает, что  $\inf f(X)$  и  $\sup f(X)$  лежат в  $f(X)$ , т.е. функция достигает своего наименьшего и наибольшего значений.  $\square$

**Следствие 2.59.** *Пусть  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  — непрерывная кривая, и  $P \in \mathbb{R}^n$  — точка, не лежащая на этой кривой, т.е. не принадлежащая образу отображения  $\gamma$ . Тогда функция  $f(t) = |P\gamma(t)|$  расстояния от  $P$  до точек кривой  $\gamma(t)$  достигает своего минимума, и этот минимум положителен.*

*Доказательство.* Действительно, функция  $f(t)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , поэтому, в силу следствия 2.58, функция  $f$  достигает своего наименьшего значения в некоторой точке  $t_0 \in [a, b]$ . Но тогда  $f(t_0) = |P\gamma(t_0)| > 0$ , так как  $P$  не лежит на  $\gamma$ .  $\square$

## Литература к главе 2

- [1] Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. *Общая топология*. Учебное пособие для вузов. М.: Высш. школа, 1979.
- [2] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. *Курс дифференциальной геометрии и топологии*, СПб: Лань, 2010.



## Упражнения к главе 2

**Упражнение 2.1.** Рассмотрим множество  $\mathbb{R}$  и семейство его подмножеств  $\beta$ , состоящее из всевозможных лучей  $(a, +\infty)$ . Докажите, что

- (1) семейство  $\beta$  — база окрестностей;
- (2) функция  $f(x) = 2x$  непрерывна;
- (3) функция  $g(x) = -x$  непрерывной не является.

Здесь  $f$  и  $g$  рассматриваются как отображения из  $(\mathbb{R}, \beta)$  в  $(\mathbb{R}, \beta)$ .

**Упражнение 2.2.** Пусть  $X$  — произвольное множество. Рассмотрим следующие семейства подмножеств  $X$ :

- (1)  $\beta_a = \{X\}$ ;
- (2)  $\beta_d$ , совпадающее с семейством всех одноточечных множеств;
- (3)  $\beta_z$ , состоящее всех множеств  $U$ , для которых  $X \setminus U$  — конечный набор точек.

Докажите, что каждое из этих семейств является базой окрестностей и опишите порожденные ими топологии  $\tau_a$ ,  $\tau_d$  и  $\tau_z$ . Семейство  $\tau_a$  называется *антидискретной топологией*, семейство  $\tau_d$  — *дискретной топологией*, а семейство  $\tau_z$  для бесконечного  $X$  — *топологией Зарисского*; для конечного  $X$  топология  $\tau_z$  совпадает с  $\tau_d$ .

**Упражнение 2.3.** Рассмотрим отображение  $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ , заданное формулой  $f(x) = \sin x$ . Выясните, является ли  $f$  непрерывным, если мы рассматриваем на  $\mathbb{R}$  и  $[-1, 1]$  следующие топологии из задачи 2.2:

- (1)  $(\mathbb{R}, \tau_a)$ ,  $([-1, 1], \tau_z)$ ;
- (2)  $(\mathbb{R}, \tau_z)$ ,  $([-1, 1], \tau_a)$ ;
- (3)  $(\mathbb{R}, \tau_d)$ ,  $([-1, 1], \tau_z)$ ;
- (4)  $(\mathbb{R}, \tau_z)$ ,  $([-1, 1], \tau_d)$ ;
- (5)  $(\mathbb{R}, \tau_z)$ ,  $([-1, 1], \tau_z)$ .

**Упражнение 2.4.** Пусть отображение  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  задано в виде  $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ . Докажите, что отображение  $\gamma$  непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все функции  $x_i(t)$ .

**Упражнение 2.5.** Пусть  $f(x_1, \dots, x_n)$  — непрерывная функция, заданная на пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Обозначим через  $\Gamma$  множество нулей функции  $f$ , т.е.  $\Gamma = \{(x_1, \dots, x_n) : f(x_1, \dots, x_n) = 0\}$ . Положим  $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \Gamma$ . Докажите, что точки  $P, Q \in \Omega$ , в одной из которых функция  $f$  положительна, а в другой — отрицательна, лежат в разных компонентах множества  $\Omega$ , т.е. их нельзя соединить непрерывной кривой, лежащей в  $\Omega$ .

**Упражнение 2.6.** Пусть  $X$  — подмножество плоскости  $\mathbb{R}^2$ , которое получается из  $\mathbb{R}^2$  выбрасыванием оси  $x$ . Докажите, что  $X$  состоит из двух компонент — открытых полуплоскостей  $\{(x, y) : y < 0\}$  и  $\{(x, y) : y > 0\}$ .

**Упражнение 2.7.** Пусть  $X$  — подмножество плоскости  $\mathbb{R}^2$ , которое получается из  $\mathbb{R}^2$  выбрасыванием двух лучей, выходящих из одной точки. Докажите, что  $X$  состоит из двух компонент.

**Упражнение 2.8.** Пусть  $X$  — подмножество плоскости  $\mathbb{R}^2$ , которое получается из некоторого круга  $U_r(A)$  выбрасыванием произвольного его радиуса  $AC$ . Докажите, что  $X$  — линейно связное пространство.

**Упражнение 2.9.** Пусть  $X$  — подмножество плоскости  $\mathbb{R}^2$ , которое получается из некоторого круга  $U_r(A)$  выбрасыванием двух различных его радиусов  $AC$  и  $AD$ . Докажите, что  $X$  состоит из двух компонент.

**Упражнение 2.10.** Докажите, что

- (1) отрезок и окружность не гомеоморфны;
- (2) буквы Р и Я не гомеоморфны;
- (3) сфера  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  с выкинутой точкой  $N = (0, 0, 1)$  и плоскость  $\mathbb{R}^2$  гомеоморфны.

**Упражнение 2.11.** Докажите, что дважды перекрученная лента (см. рис. 2.5 из лекции) гомеоморфна цилиндру.

**Упражнение 2.12.** Покажите, что локально постоянная функция постоянна на каждой компоненте.

# Глава 3

## Теорема Жордана

**План.** Замкнутая кривая, незамкнутая кривая, незамкнутая кривая без самопересечений, замкнутая кривая без самопересечений, теорема Жордана о кривой без самопересечений, лежащей на евклидовой плоскости, ломаная, вершины ломаной, ребра ломаной, замкнутая ломаная, внутренние и концевые вершины ломаной, незамкнутая ломаная без самопересечений, замкнутая ломаная без самопересечений, теорема Жордана о ломаной без самопересечений, лежащей на евклидовой плоскости, аффинное отображение из отрезка в  $\mathbb{R}^n$ , невырожденное аффинное отображение из отрезка в  $\mathbb{R}^n$ , вырожденное аффинное отображение из отрезка в  $\mathbb{R}^n$ , расстояние между подмножествами  $\mathbb{R}^n$ , расстояние от точки до подмножества  $\mathbb{R}^n$ , доказательство теоремы Жордана для ломаных.

В данном разделе мы обсудим знаменитую теорему Жордана о кривых без самопересечений, лежащих на евклидовой плоскости. Мы приведем доказательство этой теоремы в случае, когда кривая является ломаной. Доказательства в общем случае можно изучить, например, по публикациям [1], [2], [3], [4].

### 3.1 Теорема Жордана

Пусть  $X$  — топологическое пространство.

**Определение 3.1.** Непрерывная кривая  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  называется *замкнутой*, если  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , и *незамкнутой* в противном случае. Незамкнутая непрерывная кривая  $\gamma$  называется *кривой без самопересечений*, если отображение  $\gamma$  взаимно-однозначно с образом. Замкнутая непрерывная кривая называется *замкнутой кривой без самопересечений*, если единственные две различные точки  $t_1, t_2$  отрезка  $[a, b]$ , для которых  $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ , — это точки  $a$  и  $b$ .

**Определение 3.2.** Напомним, что *компонентой линейной связности* топологического пространства  $X$  или, короче, *компонентой*  $X$  назы-

ваются каждое линейно связное подмножество в  $X$ , которое не содержится в большем линейно связном подмножестве. Каждая точка из  $X$  лежит в некоторой компоненте, и никакие две компоненты не пересекаются, поэтому  $X$  разбивается на компоненты (множество компонент в  $X$  определено однозначно).

**Теорема 3.3 (Жордан).** Пусть  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  — непрерывная кривая без самопересечений. Обозначим через  $\Gamma$  образ отображения  $\gamma$ , и пусть  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ . Тогда

- (1) если кривая  $\gamma$  незамкнутая, то  $\Omega$  — линейно связно;
- (2) если кривая  $\gamma$  замкнутая, то  $\Omega$  состоит ровно из двух компонент.

Теорема Жордана 3.3 на первый взгляд кажется совершенно очевидной, но ее доказательство далеко нетривиально. Дело в том, что она обязана своим существованием некоторым свойствам, тесно связанным с глобальным “устройством” плоскости. Рассмотрим несколько примеров (без подробных доказательств), наглядно демонстрирующих это наблюдение.

## Сфера

Замкнутая кривая без самопересечений разбивает двумерную сферу на две компоненты, а незамкнутая — нет, см. рис. 3.1.



Рис. 3.1: Теорема Жордана верна для сферы

## Цилиндр

То же самое верно и для цилиндра, см. рис. 3.2.

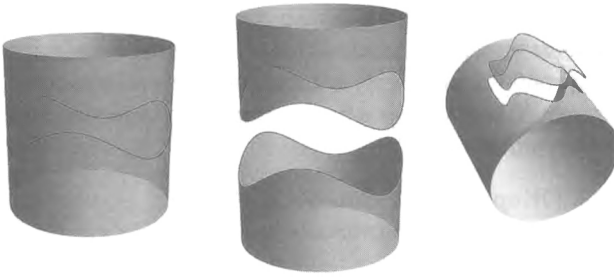


Рис. 3.2: Теорема Жордана верна для цилиндра

## Тор

Незамкнутая кривая без самопересечений по-прежнему не разбивает тор на компоненты. А вот среди замкнутых кривых есть как разбивающие, так и не разбивающие, см. рис. 3.3.

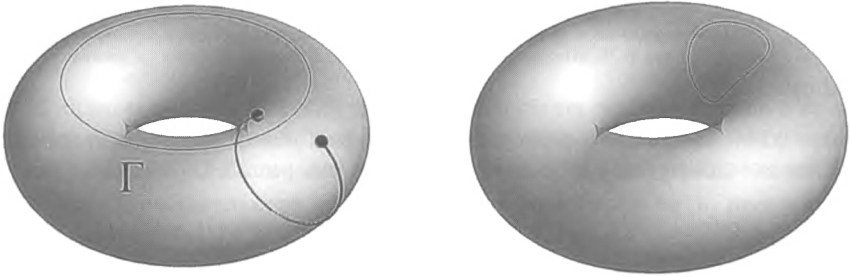


Рис. 3.3: На торе теорема Жордана не верна

## Лист Мёбиуса

“Физическая реализация” листа Мёбиуса получается, если склеить противоположные два края прямоугольной полоски бумаги с перекручиванием на  $180^\circ$ , см. рис. 3.4, слева. Рассмотрим на листе Мёбиуса среднюю линию  $\Gamma$ , см. рис. 3.4, справа. Как показано на этом же рисунке,  $\Gamma$  не разбивает лист Мёбиуса.

Мы докажем теорему Жордана в частном случае: для ломаных. Дадим соответствующие определения.

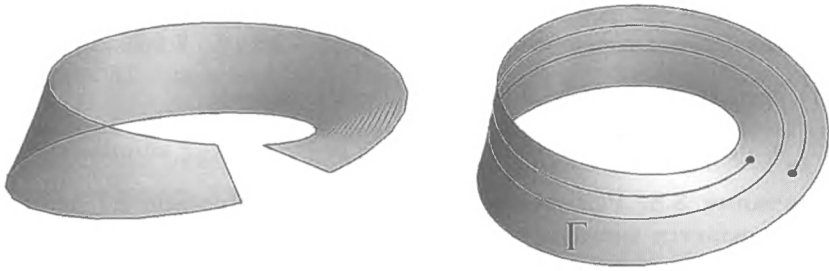


Рис. 3.4: На листе Мёбиуса теорема Жордана не верна

## 3.2 Ломаные и теорема Жордана

**Определение 3.4.** Ломаной в  $\mathbb{R}^n$  называется последовательность точек  $A_0, A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}^n$  и отрезков  $[A_k, A_{k+1}]$ ,  $k = 0, \dots, m-1$ , последовательно их соединяющих.

Точки  $A_0, A_1, \dots, A_m$  называются *вершинами ломаной*, а отрезки  $e_k = [A_k, A_{k+1}]$ ,  $k = 0, \dots, m-1$ , — ее *ребрами*.

Ломаная называется *замкнутой*, если  $A_0$  совпадает с  $A_m$ , и *незамкнутой* в противном случае.

Для незамкнутой ломаной вершины  $A_0$  и  $A_m$ , а также ребра  $e_0$  и  $e_{m-1}$  называются *концевыми*, а все остальные вершины и ребра — *внутренними*. У замкнутой ломаной все вершины и ребра называются *внутренними*.

**Определение 3.5.** Незамкнутая ломаная называется *ломаной без самопересечений*, если никакие два отрезка ломаной не имеют общих точек, за исключением  $[A_{k-1}, A_k] \cap [A_k, A_{k+1}] = A_k$ , где  $k = 1, \dots, m-1$ .

Замкнутая ломаная называется *замкнутой ломаной без самопересечений*, если никакие два отрезка ломаной не имеют общих точек, за исключением  $[A_{k-1}, A_k] \cap [A_k, A_{k+1}] = A_k$ , где  $k = 1, \dots, m-1$ , и  $[A_0, A_1] \cap [A_{m-1}, A_m] = A_0 = A_m$ .

**Замечание 3.6.** Так как ломаная однозначно задается последовательностью своих вершин, мы будем иногда говорить “ $L = A_0 A_1 \dots A_m$  — ломаная в  $\mathbb{R}^n$ ”, понимая под этим, что  $A_0, A_1, \dots, A_m$  — последовательность вершин ломаной  $L$ .

Также мы иногда будем рассматривать ломаную в  $\mathbb{R}^n$  как подмножество  $\mathbb{R}^n$ , равное объединению всех ее ребер. В этом смысле, например, мы будем понимать выражение “ $L \subset \mathbb{R}^2$  — ломаная на плоскости”.

**Теорема 3.7** (теорема Жордана для ломаных). Пусть  $L \subset \mathbb{R}^2$  — ломаная без самопересечений. Положим  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus L$ . Тогда

- (1) если  $L$  незамкнутая, то  $\Omega$  — линейно связно;
- (2) если  $L$  замкнутая, то  $\Omega$  состоит ровно из двух компонент.

**Замечание 3.8.** Разберемся, почему теорема Жордана 3.7 для ломаных является частным случаем общей теоремы Жордана 3.3. Для этого достаточно по данной ломаной  $L$  построить непрерывную кривую, образом которой служит  $L$ .

**Определение 3.9.** Аффинным отображением  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  называется любое отображение вида

$$f: t \mapsto P + t \cdot \vec{v},$$

где  $P, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ .

При  $\vec{v} \neq 0$  аффинное отображение называется невырожденным, а при  $\vec{v} = 0$  — вырожденным.

**Предложение 3.10.** Для любого отрезка  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  и любых двух точек  $A, B \in \mathbb{R}^n$  существует единственное аффинное отображение  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , для которого  $A = f(a)$ ,  $B = f(b)$ . Это отображение задается формулой

$$f: t \mapsto A \frac{b-t}{b-a} + B \frac{t-a}{b-a}.$$

Отметим, что заданное такой формулой отображение невырождено в точности при  $A \neq B$ . В этом случае  $f$ -образом отрезка  $[a, b]$  является отрезок  $[A, B]$ , по которому точка  $f(t)$  движется равномерно (скорость движения этой точки постоянна). Если  $A = B$ , то  $f$ -образ отрезка  $[a, b]$  состоит из одной точки  $A = B$ .

Пусть в  $\mathbb{R}^n$  дана ломаная  $L = A_0 A_1 \dots A_m$ . Определим отображение  $\gamma_L: [0, m] \rightarrow \mathbb{R}^n$  на отрезке  $[k, k+1]$  для каждого  $k = 0, \dots, m-1$  формулой

$$\gamma_L: t \mapsto A_k(k+1-t) + A_{k+1}(t-k).$$

Из сказанного выше следует, что  $\gamma_L$  отображает отрезок  $[k, k+1]$  на ребро  $e_k = [A_k, A_{k+1}]$  ломаной  $L$ . Из леммы 2.38 вытекает, что отображение  $\gamma_L$  непрерывно. Ломаная  $L$  и непрерывная кривая  $\gamma_L$  одновременно замкнуты или незамкнуты; кроме того, они одновременно или являются ломаной и кривой без самопересечений, или нет. Образ

отображения  $\gamma_L$  совпадает с  $L$ . Поэтому утверждение общей теоремы Жордана 3.3 о кривой  $\gamma_L$  — это в точности утверждение теоремы Жордана 3.7 для ломаных  $L$ .

**Замечание 3.11.** На самом деле, при доказательстве теоремы 3.7 мы покажем, что любые две точки из одной компоненты множества  $\Omega$  можно соединить ломаной.

### 3.3 Доказательство теоремы Жордана для ломаных

Нам нужно проделать некоторую подготовительную работу.

**Определение 3.12.** Пусть  $A$  и  $B$  — два произвольных непустых подмножества пространства  $\mathbb{R}^n$ , тогда *расстоянием*  $\rho(A, B)$  между  $A$  и  $B$  назовем величину  $\inf\{|ab| : a \in A, b \in B\}$ , где как обычно  $|ab|$  обозначает длину отрезка, соединяющего точки  $a$  и  $b$ . В частности, так определяется *расстояние от точки  $a$  до множества  $B$* , а именно, оно равно  $\rho(\{a\}, B)$ .

Ясно, что для одноточечных подмножеств  $A = \{a\}$  и  $B = \{b\}$  имеем  $\rho(A, B) = |ab|$ .

**Замечание 3.13.** Заметим, что определенная только что функция на непустых подмножествах  $\mathbb{R}^n$  не задает метрику. В самом деле, хотя она симметрична, т.е.  $\rho(A, B) = \rho(B, A)$ , остальные аксиомы не выполняются. Например, существуют непересекающиеся подмножества  $A, B \subset \mathbb{R}^n$ , для которых  $\rho(A, B) = 0$  (приведите пример таких подмножеств). Кроме того, неравенство треугольника выполняется не для всех  $A, B, C$ : например, для подмножеств прямой  $A = [0, 1]$ ,  $B = [1, 2]$  и  $C = [2, 3]$  имеем  $1 = \rho(A, C) \not\leq 0 + 0 = \rho(A, B) + \rho(B, C)$ .

**Лемма 3.14.** *Расстояние между двумя отрезками в  $\mathbb{R}^n$  равно 0 тогда и только тогда, когда они пересекаются.*

*Доказательство.* Докажем единственную нетривиальную часть леммы, а именно, что расстояние между непересекающимися отрезками  $[A_1, B_1]$  и  $[A_2, B_2]$  положительно. Отрезок  $[A_i, B_i]$  состоит из точек  $P_i(t_i) = A_i + (B_i - A_i)t_i$ , где  $t_i \in [0, 1]$ , поэтому функция  $\rho(t_1, t_2) = |P_1(t_1)P_2(t_2)|$  непрерывна. Эта функция определена на квадрате  $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ , являющемся замкнутым и ограниченным множеством, а значит, компактом по теореме 2.55. Поэтому в силу следствия 2.58,



функция  $\rho(t_1, t_2)$  принимает свое наименьшее значение в некоторой точке  $(x, y)$ . Так как отрезки не пересекаются,  $\rho(x, y) = |P_1(x)P_2(y)| > 0$ , поэтому  $\rho(t_1, t_2)$  — всюду положительная функция.  $\square$

**Следствие 3.15.** *Расстояние между двумя ломаными в  $\mathbb{R}^n$  равно 0 тогда и только тогда, когда ломаные пересекаются.*

*Доказательство.* Очевидным образом вытекает из предыдущего леммы 3.14, поскольку ломаная представляет собой объединение конечного числа отрезков.  $\square$

*Доказательство теоремы 3.7.*

**Стратегия** нашего доказательства такова.

- (1) Мы подберем для каждой точки  $P$  нашей ломаной  $L$  достаточно маленькую круговую окрестность  $U_P$ . При этом для внутренней точки  $P$  ломаная  $L$  разбивает  $U_P$  на две компоненты, а для концевой точки  $P$  (если  $L$  — незамкнутая) ломаная  $L$  не разбивает  $U_P$ .
- (2) Мы докажем, что для каждой точки  $P$  нашей ломаной  $L$  любую точку из  $U_P \setminus L$  можно соединить ломаной, не пересекающей  $L$ , с точкой из  $U_{A_0} \setminus L$ .
- (3) Мы докажем, что любую точку плоскости, не лежащую на  $L$ , можно соединить отрезком, не пересекающим  $L$ , с точкой из некоторой окрестности вида  $U_P$ .

Из пунктов (2) и (3) следует, что для незамкнутой ломаной  $L$  дополнение  $\mathbb{R}^2 \setminus L$  состоит из одной компоненты, так как любую точку этого дополнения можно соединить ломаной с некоторой точкой множества  $U_{A_0} \setminus L$ , которое линейно связно.

Также из пунктов (2) и (3) следует, что для замкнутой ломаной  $L$  дополнение  $\mathbb{R}^2 \setminus L$  состоит не более чем из двух компонент, так как любую точку этого дополнения можно соединить ломаной с некоторой точкой множества  $U_{A_0} \setminus L$ , которое состоит из двух компонент.

- (4) Наконец, мы докажем, что замкнутая ломаная разбивает плоскость не менее чем на две компоненты. Для этого мы построим на  $\mathbb{R}^2 \setminus L$  локально постоянную функцию, принимающую два значения: точки, в которых эта функция принимает различные значения, лежат в разных компонентах.

Перейдем к реализации стратегии.

### 3.3.1 Реализация пункта (1)

Для каждой точки  $P$  ломаной  $L \subset \mathbb{R}^2$  обозначим через  $\varepsilon_P$  произвольное положительное число, меньшее, чем расстояние от  $P$  до объединения всех вершин ломаной  $L$  (если  $P$  — вершина, то расстояния рассматриваем только до вершин, отличных от  $P$ ), и меньше, чем расстояния от  $P$  до всех ребер ломаной  $L$ , не содержащих  $P$ .

Положим  $U_P = U_{\varepsilon_P}(P)$ , рис. 3.5. Ясно, что в  $U_P$  могут попасть только точки ребер, содержащих  $P$ , следовательно,  $U_P \cap L$  представляет собой

- (1) радиус круга  $U_P$ , если  $P$  — конечная вершина;
- (2) два различных радиуса круга  $U_P$ , если  $P$  — внутренняя вершина;
- (3) диаметр круга  $U_P$ , если  $P$  — внутренняя точка ребра.

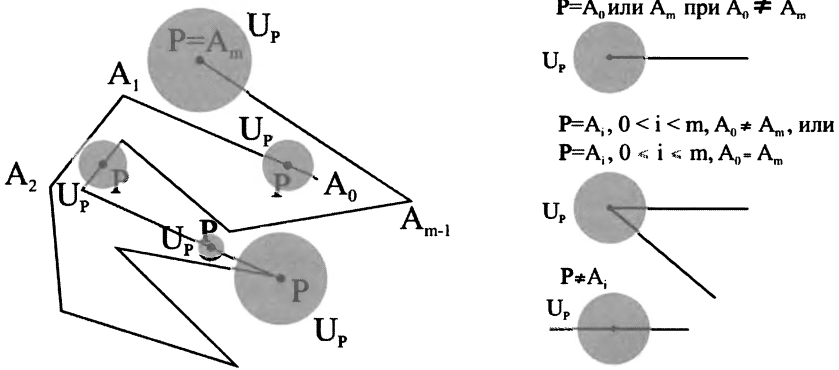


Рис. 3.5: Окрестность  $U_P$

Как было отмечено в предыдущей лекции, в первом случае множество  $U_P \setminus L$  линейно связно, а в оставшихся двух случаях состоит из двух компонент.

**Замечание 3.16.** Обратите внимание, что  $\varepsilon_P$  можно брать настолько малым, насколько нам нужно, так как ограничение на это число установлено только сверху.

### 3.3.2 Реализация пункта (2)

**Определение 3.17.** Пусть  $X$  — произвольное подмножество  $\mathbb{R}^n$ , и  $\varepsilon > 0$ . Тогда  $\varepsilon$ -окрестностью множества  $X$  будем называть множество  $U_\varepsilon(X) = \cup_{x \in X} U_\varepsilon(x)$ .

**Лемма 3.18.** Пусть  $P$  — внутренняя точка ребра  $e$  ломаной  $L$ , а  $S$  — одна из вершин ребра  $e$ . Тогда каждую точку  $Q \in U_P \setminus L$  можно соединить с некоторой точкой  $T \in U_S \setminus L$  ломаной, не пересекающей  $L$ . Обратно, каждую точку  $T \in U_S \setminus L$  можно соединить с некоторой точкой  $Q \in U_P \setminus L$  ломаной, не пересекающей  $L$ . Более того, эту соединяющую ломаную можно выбрать так, что она будет лежать в  $U_\varepsilon(e)$ , где  $\varepsilon = \max(\varepsilon_P, \varepsilon_S)$ .

*Доказательство.* Пусть  $A$  — точка на интервале  $(P, S)$ , отстоящая от  $S$  менее чем на  $\varepsilon_S/2$ . Обозначим через  $L'$  объединение всех ребер ломаной  $L$ , кроме  $e$ . Тогда  $[A, P] \cap L' = \emptyset$ , поэтому, по следствию 3.15,  $\delta = \rho([A, P], L') > 0$ . Отсюда вытекает, что каждый отрезок  $[A', P']$ , полученный из  $[A, P]$  смещением в перпендикулярном  $e$  направлении на положительное расстояние, меньшее, чем  $\delta$ , не пересекает  $L$ , так как смещенный отрезок не пересекает ни  $e$ , ни  $L'$ . Заметим, что  $A' \in U_S$  при любом смещении, меньшем  $\delta$ , так как  $\delta < |AS| < \varepsilon_S/2$  и, значит,  $|A'S|^2 = |A'A|^2 + |AS|^2 < (\varepsilon_S/2)^2 + (\varepsilon_S/2)^2 < \varepsilon_S^2$ . Кроме того,  $P' \in U_P$  при любом смещении, меньшем  $\varepsilon_P$ . Зададим положительную величину смещения меньшей, чем  $\delta$  и  $\varepsilon_P$ , тогда  $A' \in U_S$  и  $P' \in U_P$ . В частности, при таком смещении имеем  $[A', P'] \subset U_\varepsilon(e)$ .

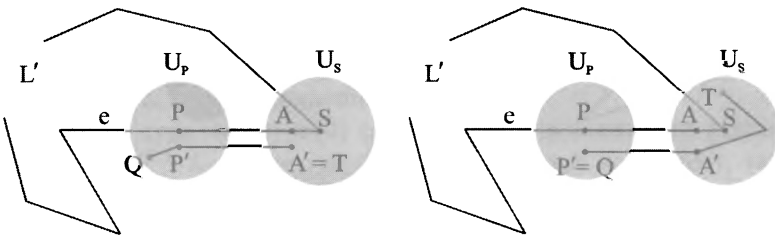


Рис. 3.6: Доказательство леммы 3.18

Для доказательства первого утверждения леммы выберем направление смещения так, чтобы точки  $P'$  и  $Q$  оказались в одной компоненте множества  $U_P \setminus L$ , соединим точки  $Q$  и  $P'$  отрезком (он целиком лежит в  $U_P \setminus L$ ), а в качестве  $T$  возьмем точку  $A'$ . Для доказательства вто-

рого утверждения леммы выберем направление смещения так, чтобы точки  $A'$  и  $T$  оказались в одной компоненте множества  $U_S \setminus L$ , соединим точки  $T$  и  $A'$  непрерывной кривой (это можно сделать ломаной), лежащей в  $U_S \setminus L$ , а в качестве  $Q$  возьмем точку  $P'$ , рис. 3.6.

Осталось заметить, что все фрагменты построенной ломаной лежат в  $U_\varepsilon(e)$ .  $\square$

**Следствие 3.19.** Пусть  $P$  — произвольная точка ломаной  $L$ , а  $Q$  — произвольная точка из  $U_P \setminus L$ . Тогда существует такая точка  $T \in U_{A_0} \setminus L$ , что  $Q$  и  $T$  соединяются ломаной  $\gamma$ , не пересекающей  $L$ . Более того, эту соединяющую ломаную можно выбрать так, что она будет лежать в  $U_\varepsilon(L)$ , где  $\varepsilon = \max(\varepsilon_P, \varepsilon_{A_0})$ .

*Доказательство.* Если  $P = A_0$ , то  $\gamma$  — это 0-звенная ломаная  $Q$  (или кривая, которая является отображением отрезка в точку  $Q = T$ ).

Пусть теперь  $P \neq A_0$ . Тогда  $P \in (A_i, A_{i+1}]$  для некоторого  $i$ . Если  $P = A_{i+1}$ , выберем произвольную точку  $P_i \in (A_i, A_{i+1})$  и соединим  $Q$  с некоторой точкой  $Q_i \in U_{P_i} \setminus L$  ломаной, не пересекающей  $L$ , что можно сделать в силу леммы 3.18. Затем, по этой же лемме, соединим  $Q_i$  и некоторую  $T_i \in U_{A_i}$  ломаной, не пересекающей  $L$ . В результате, получим ломаную, не пересекающую  $L$  и соединяющую  $Q$  с некоторой точкой  $T_i \in U_{A_i}$ . Если же  $P \neq A_{i+1}$ , то сразу получим такую ломаную.

Затем будем последовательно соединять не пересекающимися с  $L$  ломаными точку  $T_i$  и некоторую  $Q_{i-1} \in U(P_{i-1})$ ,  $P_{i-1} \in (A_{i-1}, A_i)$ , точку  $Q_{i-1}$  и некоторую  $T_{i-1} \in U_{A_{i-1}}$ , и т.д., пока не дойдем до точки  $T_0 \in U_{A_0}$ . Остается заметить, что радиусы  $\varepsilon_X$  всех встречающихся кругов  $U_X$  (кроме  $U_P$  и  $U_{A_0}$ ) мы можем выбирать сколь угодно малыми, а именно, выберем их меньшими, чем  $\varepsilon$ . Тогда, по лемме 3.18, каждый построенной по этой лемме фрагмент ломаной будет лежать в  $\varepsilon$ -окрестности ребра, которому принадлежат центры кругов, так что вся ломаная лежит в  $U_\varepsilon(L)$ .  $\square$

### 3.3.3 Реализация пункта (3)

Рассмотрим теперь произвольную точку  $R \in \Omega$ . Отрезок  $[R, A_0]$  пересекает ломаную  $L$  по конечному числу отрезков и точек. Обозначим через  $P$  ближайшую к  $R$  точку из  $[R, A_0] \cap L$ . Пусть  $Q$  — произвольная точка из  $U_P \cap [R, P)$ , тогда  $Q \in \Omega$ , причем отрезок  $[R, Q]$  не пересекает  $L$ . По следствию 3.19, существует ломаная  $\gamma$ , соединяющая  $Q$  с некоторой точкой  $T \in U_{A_0} \setminus L$  и не пересекающая  $L$ . Последовательно

проходя отрезок  $[R, Q]$  и ломаную  $\gamma$ , мы получим ломаную, соединяющую  $R$  и  $T$  и не пересекающую  $L$ . Таким образом, каждая точка  $R \in \Omega$  лежит в той же компоненте, что и некоторая точка из  $U_{A_0} \setminus L$ , рис. 3.7.

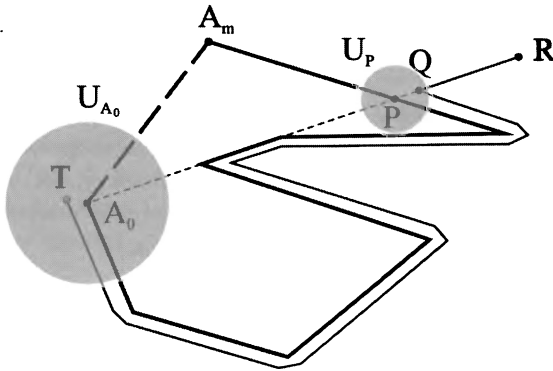


Рис. 3.7: Реализация пункта (3)

Итак, как было отмечено выше в описании стратегии доказательства, если ломаная  $L$  незамкнутая, то множество  $U_{A_0} \setminus L$  линейно связно, поэтому  $\Omega$  состоит из одной компоненты. Если же  $L$  замкнута, то  $U_{A_0} \setminus L$  состоит из двух компонент, поэтому  $\Omega$  состоит не более чем из двух компонент.

### 3.3.4 Реализация пункта (4)

Покажем теперь, что  $\Omega$  состоит не менее чем из двух компонент. Введем на плоскости декартову систему координат  $Oxy$ , для которой все вершины ломаной  $L$  имеют разные абсциссы (такая система координат существует, так как это условие запрещает лишь конечное число направлений оси  $Oy$ ). Для каждой точки  $P \in \Omega$  рассмотрим луч  $\ell_P$ , выходящий из  $P$  и сонаправленный с осью  $y$ . Пусть  $e$  — произвольное ребро ломаной  $L$ . Тогда  $\ell_P \cap e$  состоит не более чем из одной точки, в частности,  $\ell_P \cap L$  представляет собой конечное число точек.

Точку  $Q \in \ell_P \cap L$  назовем *существенной*, если выполняется одно из двух условий:

- (1) точка  $Q$  лежит внутри некоторого ребра ломаной  $L$ ;

- (2) точка  $Q$  — вершина ломаной  $L$ , и выходящие из  $Q$  ребра ломаной  $L$  лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, проходящей через  $\ell_P$ , рис. 3.8.

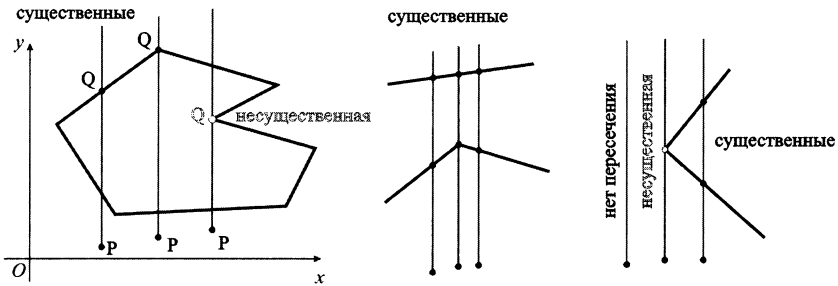


Рис. 3.8: Реализация пункта (4)

Положим  $\eta(P) = 0$ , если число существенных пересечений луча  $\ell_P$  с ломаной  $L$  четно, и  $\eta(P) = 1$  в противном случае.

Выясним, что происходит с числом  $\eta(P)$  при изменении положения точки  $P$  внутри множества  $\Omega$ . Предположим, что  $Q \in \ell_P \cap L$  — внутренняя точка некоторого ребра  $e$  ломаной  $L$ . Выберем  $\delta_Q > 0$  так, что оно было меньше минимума абсолютных величин разностей между  $x$ -координатой точки  $Q$  и  $x$ -координатами вершин ломаной, а также меньше расстояния от  $P$  до ломаной  $L$ . Тогда при смещениях точки  $P$  на расстояние, меньшее  $\delta_Q$ , ребро  $e$  по-прежнему пересекается со смещенным лучом  $\ell_P$ , так что вклад ребра  $e$  в четность числа  $\eta(P)$  не меняется.

Пусть теперь  $Q$  — вершина ломаной  $L$ , а  $e$  и  $f$  — выходящие из  $Q$  ребра ломаной  $L$ , так что  $Q = (e \cup f) \cap \ell_P$ .

Если  $Q$  — существенное пересечение, то выберем число  $\delta_Q > 0$  так, чтобы оно было меньше абсолютных величин разностей между  $x$ -координатой вершины  $Q$  и  $x$ -координатами остальных вершин ломаной, а также меньше расстояния от  $P$  до ломаной  $L$ . Тогда при сдвиге точки  $P$  на расстояние, меньшее  $\delta$ , смещенный луч  $\ell_P$  продолжает пересекать  $e \cup f$  ровно по одной точке, причем это пересечение остается существенным, поэтому вклад пары ребер  $e$  и  $f$  в четность числа  $\eta(P)$  не меняется.

Осталось разобрать случай, когда  $Q$  — несущественное пересечение. Выберем  $\delta_Q > 0$  как в предыдущем абзаце. Обозначим через  $\ell$  прямую, проходящую через  $\ell_P$ . Пусть  $P$  смещается на расстояние,

меньшее  $\delta_Q$ . Если  $P$  смещается вдоль  $\ell$ , то  $Q$  остается несущественным пересечением. Если  $P$  смещается в ту ограниченную  $\ell$  полуплоскость, которая содержит ребра  $e$  и  $f$ , то вместо несущественного пересечения  $Q$  возникают два существенных пересечения (с ребрами  $e$  и  $f$ ), так что их суммарный вклад в  $\eta(P)$  равен нулю. Если же  $P$  смещается в противоположную полуплоскость (не содержащую  $e$  и  $f$ ), то ребра  $e$  и  $f$  перестают пересекаться со смещенным  $\ell_P$  и, значит, вклад этих ребер в  $\eta(P)$  также равен нулю.

Пусть  $\delta > 0$  меньше любого из конечного числа чисел  $\delta_Q$ , где  $Q$  пробегает все точки из  $\ell_P \cap L$ . Из приведенных выше рассуждений следует, что если  $P' \in U_\delta(P)$ , то  $\eta(P) = \eta(P')$ ; иными словами, функция  $\eta$  на  $\Omega$  локально постоянна. Так как  $\eta$  принимает конечное число значений, применимо следствие 2.43, в соответствии с которым  $\eta$  постоянна на каждой компоненте.

Покажем теперь, что существуют точки, в которых  $\eta$  принимает различные значения. Пусть  $Q$  — середина некоторого ребра  $e$  ломаной  $L$ . Напомним, что круг  $U_Q$  имеет радиус  $\varepsilon_Q$  и не пересекает ребра ломаной  $L$  отличные от  $e$ . Обозначим через  $Q_1$  и  $Q_2$  соответственно результат смещения точки  $Q$  в направлении оси  $y$  и в противоположном направлении на расстояние  $\varepsilon_Q/2$ . Тогда точки  $Q_i$  лежат в  $\Omega$ ,  $[Q_1, Q_2] \cap L = Q$  и  $\ell_{Q_1} \subset \ell_{Q_2}$ . Таким образом,  $\ell_{Q_2} \cap L = (\ell_{Q_1} \cap L) \cup \{Q\}$  и  $Q$  является существенной точкой из  $\ell_{Q_2} \cap L$ , поэтому  $\eta(Q_1) \neq \eta(Q_2)$  и, значит, точки  $Q_1$  и  $Q_2$  лежат в разных компонентах множества  $\Omega$ . Тем самым доказано, что множество  $\Omega$  имеет не менее двух компонент, что завершает доказательство теоремы 3.7.  $\square$

## Литература к главе 3

- [1] Прасолов В.В. *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии*, 2004, изд-во МЦНМО.
- [2] Вольперт А.И. *Элементарное доказательство теоремы Жордана*. УМН, 1950, т. 5, вып. 5(39), с. 168–172.
- [3] Филиппов А.Ф. *Элементарное доказательство теоремы Жордана*. УМН, 1950, т. 5, вып. 5(39), с. 173–176.
- [4] Парамонов П.В. *Теорема Жордана*,  
<http://www.math.msu.su/tffa/lectures/JORDANThlec2012.pdf>

## Упражнения к главе 3

### Упражнение 3.1.

- (1) Приведите пример непересекающихся подмножеств на прямой, расстояние между которыми равно нулю.
- (2) Приведите пример непересекающихся замкнутых подмножеств прямой, расстояние между которыми равно нулю.
- (3) Существуют ли два замкнутых непересекающихся подмножества окружности, находящиеся на нулевом расстоянии?

**Упражнение 3.2.** Пусть  $A$  — некоторое подмножество плоскости. Рассмотрим функцию  $f(x) = \inf\{|xy| : y \in A\}$  (расстояние от  $x$  до  $A$ ). Докажите, что  $f$  непрерывна.

**Упражнение 3.3.** Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — непрерывные функции, заданные на топологическом пространстве  $X$ . Докажите, что функция  $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$  также непрерывна.

**Упражнение 3.4.** Докажите, не используя теорему Жордана, что квадрат (стороны квадрата) разбивает плоскость на 2 компоненты.

**Упражнение 3.5.** Докажите, не используя теорему Жордана, что треугольник (замкнутая трехзвенная ломаная) разбивает плоскость на 2 компоненты.

**Упражнение 3.6.** Пусть  $L \subset \mathbb{R}^2$  — замкнутая ломаная без самопересечений такая, что для каждого ее ребра ломаная  $L$  лежит в замкнутой полуплоскости, ограниченной прямой, проходящей через это ребро (такие ломаные иногда называют *выпуклыми*). Не используя теорему Жордана, докажите, что  $L$  разбивает плоскость на 2 компоненты.

**Упражнение 3.7.** Докажите, что открытое подмножество в  $\mathbb{R}^n$  линейно связно тогда и только тогда, когда любые две его точки можно соединить ломаной.

**Упражнение 3.8.** Пусть  $L \subset \mathbb{R}^2$  — незамкнутая ломаная без самопересечений. Выберем произвольное  $\varepsilon > 0$  и рассмотрим  $\varepsilon$ -окрестность  $U_\varepsilon(L)$  ломаной  $L$ . Пусть  $P$  и  $Q$  — произвольные точки из  $U_\varepsilon(L) \setminus L$ . Покажите, что их можно соединить ломаной, не пересекающей  $L$  и лежащей в  $U_\varepsilon(L)$ .

**Упражнение 3.9.** Пусть  $X$  — подмножество плоскости  $\mathbb{R}^2$ , которое получается из некоторого круга  $U_r(A)$  выбрасыванием трех различных его радиусов. Докажите, что  $X$  состоит из трех компонент.



**Упражнение 3.10.** Пусть  $OA$ ,  $OB$  и  $OC$  — три отрезка, причем любые два из них имеют только одну общую точку  $O$ . Докажите, что объединение этих отрезков не разбивает плоскость, т.е. что  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus (OA \cup OB \cup OC)$  линейно связно.

**Упражнение 3.11.** Пусть  $L_1$  и  $L_2$  — незамкнутые ломаные без самопересечений, лежащие на плоскости  $\mathbb{R}^2$  и не имеющие общих точек. Докажите, что  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus (L_1 \cup L_2)$  линейно связно.

**Упражнение 3.12.** Рассмотрим конечную последовательность

$$[A_1, B_1], [A_2, B_2], \dots, [A_m, B_m]$$

отрезков  $[A_i, B_i] \subset \mathbb{R}^2$  и положим  $X_k = \cup_{i=1}^k [A_i, B_i]$ . Предположим, что для каждого  $k = 2, \dots, m$  выполняется или  $X_{k-1} \cap [A_k, B_k] = \emptyset$ , или  $X_{k-1} \cap [A_k, B_k] = \{A_k\}$ . Докажите, что любые две точки из каждого множества  $\Omega_k = \mathbb{R}^2 \setminus X_k$  можно соединить ломаной, лежащей в  $\Omega_k$ . В частности, каждое множество  $\Omega_k$  — линейно связно.

## Глава 4

# Приложения теоремы Жордана. Плоские графы

**План.** Лемма о четырех точках на замкнутой ломаной, геометрический граф в топологическом пространстве, геометрический граф без самопересечений, комбинаторный граф, отображение графов, изоморфизм графов, изоморфные графы, реализация комбинаторного графа в топологическом пространстве, комбинаторная структура геометрического графа, отображение реализации, плоские графы, планарные графы, непланарные графы, полный двудольный граф, грань плоского графа, подграф, связная компонента графа, формула Эйлера для плоских графов, подразбиение ребра графа, гомеоморфные графы, теорема Понтрягина–Куратовского (критерий планарности графа).

Приведем ряд результатов, получающихся с помощью техники, развитой при доказательстве теоремы Жордана для ломаных. Напомним, что в прошлой лекции (см. раздел 3.3.1) мы для каждой точки  $P$  ломаной  $L \subset \mathbb{R}^2$  обозначили через  $\varepsilon_P$  произвольное положительное число, меньшее, чем расстояние от  $P$  до объединения всех вершин ломаной  $L$  (если  $P$  — вершина, то расстояния рассматриваем только до вершин, отличных от  $P$ ), и меньше, чем расстояния от  $P$  до всех ребер ломаной  $L$ , не содержащих  $P$ . Затем мы положили  $U_P = U_{\varepsilon_P}(P)$ , рис. 3.5. Напомним, что  $\varepsilon_P$  можно брать сколь угодно малым, ограничение на это число установлено только сверху.

Затем мы доказали следующее утверждение.

**Лемма (3.18).** *Рассмотрим произвольную ломаную  $L \subset \mathbb{R}^2$  без самопересечений. Пусть  $P$  — внутренняя точка ребра  $e$  ломаной  $L$ , а  $S$  — одна из вершин ребра  $e$ . Тогда каждую точку  $Q \in U_P \setminus L$  можно соединить с некоторой точкой  $T \in U_S \setminus L$  ломаной, не пересекающей  $L$ . Обратно, каждую точку  $T \in U_S \setminus L$  можно соединить с некоторой точкой  $Q \in U_P \setminus L$  ломаной, не пересекающей  $L$ . Более того, эту*

соединяющую ломаную можно выбрать так, что она будет лежать в  $U_\varepsilon(e)$ , где  $\varepsilon = \max(\varepsilon_P, \varepsilon_S)$ .

**Лемма 4.1.** Пусть  $L \subset \mathbb{R}^2$  — замкнутая ломаная без самопересечений,  $P$  — произвольная точка из  $L$ , и  $U_P$  — круг, определенный выше. Тогда  $U_P \setminus L$  состоит из двух компонент, причем эти компоненты лежат в разных компонентах множества  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus L$ .

*Доказательство.* Покажем, что компоненты множества  $U_P \setminus L$  не могут попасть в одну компоненту множества  $\Omega$ . Для этого достаточно показать, что в  $U_P \setminus L$  имеется две точки из разных компонент множества  $\Omega$ . Для этого мы воспользуемся локально постоянной функцией  $\eta$ , см. раздела 3.3.4. А именно, введем на плоскости декартовы координаты  $Oxy$ , в которых разные вершины ломаной имеют разные  $x$ -координаты; возьмем внутреннюю точку одного из радиусов  $U_P \cap L$  и сместим ее в направлении оси  $y$  и в противоположном направлении настолько мало, чтобы при перемещении не пересечь ломаную и остаться внутри  $U_P$ ; получим точки  $Q_1$  и  $Q_2$ , для которых  $\eta(Q_1) \neq \eta(Q_2)$ , что и завершает доказательство.  $\square$

**Лемма 4.2** (О четырех точках на замкнутой ломаной). Пусть  $L \subset \mathbb{R}^2$  — замкнутая ломаная без самопересечений и  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus L$ . Пусть  $P, Q, R, S$  — различные последовательные точки из  $L$ . Соединим точки  $P$  и  $R$  ломаной  $L_1$ , а точки  $Q$  и  $S$  — ломаной  $L_2$ . Предположим, что

- (1) обе  $L_i$  — ломаные без самопересечений;
- (2) обе  $L_i$  лежат, за исключением своих концевых точек, в одной и той же компоненте множества  $\Omega$ .

Тогда  $L_1$  и  $L_2$  пересекаются.

**Пример 4.3.** Покажем, что эта лемма также нетривиальна, как и теорема Жордана. Для этого рассмотрим пример, приведенный на рис. 4.1. Ломаная  $L$  на торе и на листе Мёбиуса, изображенная условно в виде красной кривой, разбивает каждую из этих поверхностей на две компоненты. Ломаные  $L_1$  и  $L_2$ , изображенные условно черной и зеленой кривыми, удовлетворяют условию леммы 4.2, однако они не пересекаются.

Проследите, какая часть приводимого ниже доказательства леммы 4.2 не проходит в описанном только что примере.

*Доказательство леммы 4.2.* Обозначим через  $L'$  и  $L''$  — ломаные, на которые  $L$  разбивается точками  $P$  и  $R$ . Без ограничения общности, будем считать, что  $Q \in L'$ , а  $S \in L''$ , см. рис. 4.2.

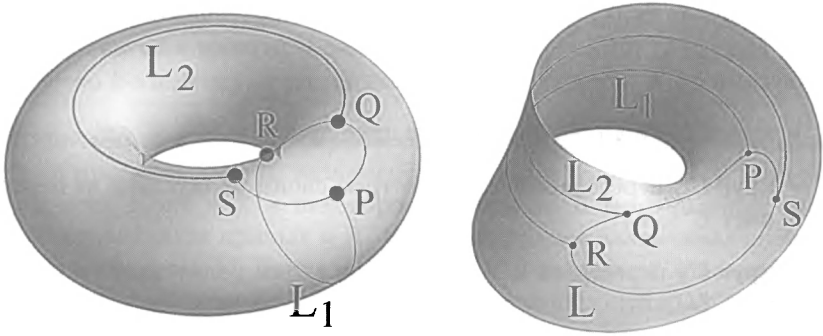


Рис. 4.1: На листе Мёбиуса лемма 4.2 неверна

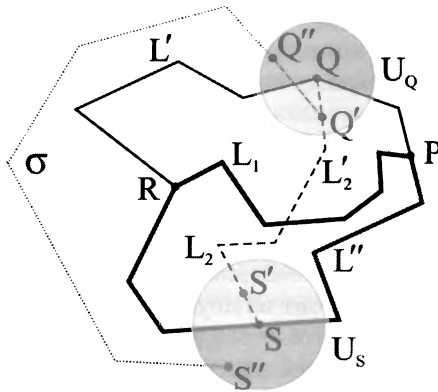


Рис. 4.2: Доказательство леммы о четырех точках

Пусть  $\delta_Q > 0$  — произвольное число, меньшее

- расстояния от  $Q$  до ребер ломаной  $L$ , не содержащих  $Q$ ;
- расстояния от  $Q$  до ребер ломаной  $L_2$ , не содержащих  $Q$ ;
- расстояния от  $Q$  до ломаной  $L_1$ ;
- величины  $|QS|/2$ .

Определим  $\delta_S > 0$  дословно, заменив в предыдущем определении  $Q$  на  $S$ . Пусть  $U_Q$  и  $U_S$  — открытые круги с центрами в точках  $Q$  и  $S$  и радиусами  $\delta_Q$  и  $\delta_S$  соответственно. Тогда

- круги  $U_Q$  и  $U_S$  не пересекают друг друга;
- круг  $U_Q$  пересекает  $L' \cup L_2$  по трем своим радиусам и не пересекает  $L'' \cup L_1$ ;
- круг  $U_S$  пересекает  $L'' \cup L_2$  по трем своим радиусам и не пересекает  $L' \cup L_1$ .

Отметим, что  $U_Q$  и  $U_S$  соответствуют так же обозначенным кругам, определенным в разделе 3.3.1 по отношению как к  $L$ , так и к  $L'' \cup L_1$ , — замкнутым ломаным без самопересечений. Поэтому, в силу леммы 4.1, множество  $U_Q \setminus L$  разбито на две компоненты, которые лежат в разных компонентах множества  $\Omega$ ; множество  $U_S \setminus L$  также разбито на две компоненты, и эти две компоненты лежат как в разных компонентах множества  $\Omega$ , так и в разных компонентах множества  $\Omega'' = \mathbb{R}^2 \setminus (L'' \cup L_1)$ , см. рис. 4.2.

Выберем произвольные точки  $Q' \in U_Q \cap L_2$ ,  $Q' \neq Q$ , и  $S' \in U_S \cap L_2$ ,  $S' \neq S$ . Тогда  $Q'$  и  $S'$  лежат в одной компоненте множества  $\Omega$ , так как соединяются частью  $L'_2$  ломаной  $L_2$ , не пересекающей  $L$ .

Выберем произвольные точки  $Q''$  и  $S''$  в тех компонентах множеств  $U_Q \setminus L$  и  $U_S \setminus L$ , которые не содержат  $Q'$  и  $S'$  соответственно. По теореме 3.7, множество  $\Omega$  состоит из двух компонент, поэтому точки  $Q''$  и  $S''$  лежат в одной компоненте — той, которая не содержит  $Q'$  и  $S'$ . Раз так, точки  $Q''$  и  $S''$  можно соединить ломаной  $\sigma$ , не пересекающей  $L$ .

Так как  $L_1$  и  $L_2$  лежат в той же компоненте, что и точки  $S'$  и  $Q'$ , ломаная  $\sigma$  не пересекает  $L_1$  и  $L_2$  и, значит, не пересекает ломаную  $L'' \cup L_1$ . Так как  $U_Q$  не пересекает  $L'' \cup L_1$ , отрезок  $[Q', Q'']$  также не пересекает ломаную  $L'' \cup L_1$ , поэтому ломаная  $[Q', Q''] \cup \sigma$  не пересекает  $L'' \cup L_1$ . Поэтому  $Q'$  и  $S''$  лежат в одной компоненте множества  $\Omega''$ .

Но  $S''$  и  $S'$ , как было отмечено выше, лежат в разных компонентах множества  $\Omega''$ , значит точки  $Q'$  и  $S'$  также лежат в разных компонентах множества  $\Omega''$ . Следовательно,  $L'_2$  пересекает  $L'' \cup L_1$ . Но, по условию,  $L'_2$  не пересекает  $L$ , а, значит, и  $L''$ . Поэтому  $L'_2$ , а с ней и  $L_2$ , пересекает  $L_1$ , что и требовалось.  $\square$

## 4.1 Геометрические графы

В данном разделе мы введем новое понятие: геометрические графы.

Напомним, что *графом*  $G$  называется тройка  $G = (V, E, \partial)$ , состоящая из множеств  $V$ ,  $E$  и отображения  $\partial: E \rightarrow V_1 \cup V_2$ , где  $V_k$  — семейство  $k$ -элементных подмножеств  $V$ .

**Определение 4.4.** *Геометрическим графом*  $G = (V, E)$  в топологическом пространстве  $X$  называется некоторое множество  $V$  попарно различных точек в  $X$  и некоторое множество  $E$  непрерывных несамопересекающихся кривых в  $X$ , начинающихся и заканчивающихся в точках множества  $V$ . Точки множества  $V$  называются *вершинами*, а кривые из множества  $E$  — *ребрами*  $G$ . Геометрический граф будем называть *графом без самопересечений*, если каждые два его ребра могут пересекаться только по своим концевым точкам.

Чтобы отличать геометрические графы от обычных, мы будем иногда последние называть *комбинаторными графами*.

**Определение 4.5.** *Комбинаторной структурой геометрического графа*  $G = (V, E)$  будем называть (комбинаторный) граф  $(V, E, \partial)$ , у которого множество вершин совпадает с множеством точек  $V$ , множество ребер совпадает с множеством кривых  $E$ , а граничное отображение  $\partial$  ставит в соответствие кривой (элементу из  $E$ ) ее концы (элемент  $V_1 \cup V_2$ ).

Вся терминология, касающаяся комбинаторных графов, естественным образом переносится на геометрические графы: можно говорить об инцидентности, о циклах, о деревьях и т.п.

Геометрические графы естественно возникают во многих геометрических задачах, например, когда мы изучаем транспортную сеть, составленную из дорог, соединяющих различные города, или телефонную сеть, или сеть трубопроводов и т.д. Однако не каждый граф имеет естественное геометрическое содержание. Например, граф рукопожатий. Тем не менее, даже в случае таких не геометрических графов их изображение на листе бумаги в виде точек и соединяющих эти точки линий, т.е. в виде геометрического графа, дает наглядное представление о комбинаторной структуре графа.

**Определение 4.6.** Пусть  $G = (V, E, \partial)$  и  $G' = (V', E', \partial')$  — два (комбинаторных) графа. *Отображением*  $f: G \rightarrow G'$  из графа  $G$  в граф  $G'$  называется отображение  $f: V \sqcup E \rightarrow V' \sqcup E'$  такое, что  $f(V) \subset V'$ ,  $f(E) \subset E'$  и для каждого  $e \in E$  выполняется  $f(\partial(e)) = \partial'(f(e))$ . Здесь той же буквой  $f$  обозначено отображение, определенное на подмножествах  $V$ : если  $\{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ , то  $f(\{v_1, \dots, v_k\}) = \{f(v_1), \dots, f(v_k)\}$ .

Взаимно однозначное  $f$  называется *изоморфизмом графов*  $G$  и  $G'$ . Графы называются *изоморфными*, если между ними существует изоморфизм.

**Замечание 4.7.** Обозначение  $X = Y \sqcup Z$  (дизъюнктное объединение множеств  $Y$  и  $Z$ ) означает одновременно, что  $X = Y \cup Z$  и  $Y \cap Z = \emptyset$ .

**Замечание 4.8.** В теории графов изоморфные графы естественно считать одинаковыми, так как они обладают одинаковыми комбинаторными свойствами.

**Определение 4.9.** Геометрический граф  $G$  в топологическом пространстве  $X$  будем называть *реализацией комбинаторного графа*  $G'$ , если задан изоморфизм графа  $G'$  и комбинаторной структуры геометрического графа  $G$ .

## 4.2 Плоские и планарные графы

Нас будет особенно интересовать случай, когда  $X = \mathbb{R}^2$ .

**Определение 4.10.** Геометрический граф без самопересечений, лежащий на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , называется *плоским*. Комбинаторный граф, для которого существует реализация в виде плоского геометрического графа, называется *планарным*, и *непланарным*, если такой реализации не существует.

**Замечание 4.11.** На самом деле, у каждого планарного графа существует реализация в виде плоского графа, ребра которого — ломаные (такие реализации иногда называют *кусочно-линейными*). Это утверждение составляет содержание упражнения 4.8 в конце этой главы. В дальнейшем, разбирая примеры непланарных графов, мы будем показывать именно то, что эти графы не имеют кусочно-линейных реализаций.

**Пример 4.12.** Обозначим через  $K_{p,q}$  простой граф  $(V, E)$ , в котором множество  $V$  представлено в виде объединения непересекающихся подмножеств  $V'$  и  $V''$  таких, что  $V'$  состоит из  $p$  вершин,  $V''$  — из  $q$  вершин, а  $vw \in E$  тогда и только тогда, когда одна из вершин  $v, w$  лежит в  $V'$ , а другая — в  $V''$ . Каждый такой граф называется *полным двудольным графом*.

Один из них —  $K_{3,3}$  — хорошо известен по математическим кружкам и олимпиадам под названием “домики и колодцы”.

**Следствие 4.13.** *Граф  $K_{3,3}$  — непланарный.*

*Доказательство.* Предположим противное, т.е. существует реализация графа  $K_{3,3}$  в виде плоского графа  $G \subset \mathbb{R}^2$ . Доказательство проведем в случае, когда ребра графа  $G$  — ломаные. Пусть  $x_1, \dots, x_6$  — вершины графа  $K_{3,3}$ , занумерованные так, как показано на рис. 4.3, а также их образы в реализации  $G$ .

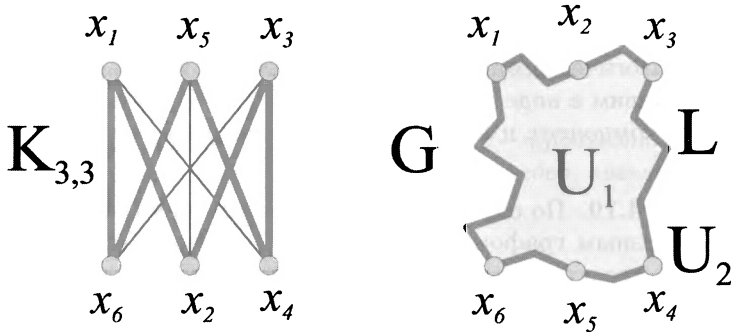


Рис. 4.3: Доказательство непланарности графа  $K_{3,3}$

Обозначим через  $L \subset \mathbb{R}^2$  замкнутую ломаную, являющуюся реализацией цикла  $x_1 \cdots x_6 x_1$ . Тогда  $L$  не имеет самопересечений и, по теореме 3.7, множество  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus L$  состоит из двух компонент. Кроме этой ломаной, имеется еще три ребра-ломаные, два из которых, за исключением своих концевых точек, обязаны лежать в одной и той же компоненте множества  $\Omega$ . Однако у любых двух из этих трех ребер вершины чередуются на  $L$ , поэтому такие ребра обязаны пересекаться в силу леммы 4.2.  $\square$

### 4.3 Формула Эйлера для плоских графов

Для геометрического графа  $G$  без самопересечений в топологическом пространстве  $X$  мы часто будем писать  $G \subset X$ , понимая в этом случае под  $G$  подмножество  $X$ , являющееся объединением множества всех вершин и образов всех ребер этого графа.

**Определение 4.14.** Пусть  $G \subset \mathbb{R}^2$  — плоский (геометрический) граф. Компоненты множества  $\mathbb{R}^2 \setminus G$  называются *гранями графа  $G$* .

**Определение 4.15.** Граф без циклов называется *лесом*.



**Определение 4.16.** Пусть  $G = (V, E, \partial)$  — произвольный граф. Каждый граф  $H = (V', E', \partial')$  такой, что  $V' \subset V$ ,  $E' \subset E$  и  $\partial'$  — ограничение  $\partial$  на  $E'$ , называется *подграфом* в  $G$ . Условие того, что  $H$  — подграф в  $G$  будем записывать так:  $H \subset G$ .

**Определение 4.17.** Связный подграф графа  $G$ , не содержащийся в другом, отличном от него связном подграфе графа  $G$ , называется *связной компонентой графа  $G$* .

**Замечание 4.18.** По аналогии с рассмотрением линейно связных компонент топологического пространства, несложно понять, что каждый граф представим в виде объединения попарно непересекающихся своих связных компонент, и семейство его связных компонент определено однозначно.

**Замечание 4.19.** По определению, каждая связная компонента леса является связным графом без циклов, т.е. деревом. Таким образом, каждый лес представляет собой дизъюнктивное объединение деревьев.

**Предложение 4.20.** Пусть  $G \subset \mathbb{R}^2$  — плоский лес. Тогда  $\mathbb{R}^2 \setminus G$  линейно связно, т.е.  $G$  имеет ровно одну грань.

*Доказательство.* Доказательство проведем для  $G$ , ребра которого — ломаные. Мы докажем, что любые две точки множества  $\mathbb{R}^2 \setminus G$  можно соединить ломаной, не пересекающей  $G$ .

Построим новый граф  $X$ , который на плоскости будет задавать то же подмножество, что и исходный граф. А именно, множество вершин графа  $X$  состоит из вершин графа  $G$  и всех внутренних вершин ломаных, являющихся ребрами  $G$ . Множество ребер графа  $X$  состоит из всех ребер ломаных (т.е. обычных отрезков), которые являются ребрами графа  $G$ . Ясно, что полученный геометрический граф  $X$  не содержит циклов, т.е. является лесом. Кроме того,  $X$  не имеет самопересечений.

Пусть  $m$  — количество ребер графа  $X$ . Положим  $X_m = X$ . Предположим, что  $m > 0$ . По упражнению 1.5, каждое дерево, являющееся связной компонентой леса  $X$  и содержащее хотя бы одно ребро, имеет висячую вершину. Выберем такую компоненту  $Y_m$  и обозначим висячую вершину через  $B_m$ . Пусть  $[A_m, B_m]$  — ребро дерева  $X_m$ , инцидентное  $B_m$ . Выкинем ребро  $[A_m, B_m]$  из леса  $X_m$ . Оставшийся лес обозначим через  $X_{m-1}$ . Ясно, что  $X_m = X_{m-1} \cup [A_m, B_m]$ . Кроме того, если  $[A_m, B_m]$  — единственное ребро дерева  $Y_m$ , то  $X_{m-1} \cap [A_m, B_m] = \emptyset$  (мы выкидываем ребро  $[A_m, B_m]$  вместе с обеими его вершинами). Иначе,  $X_{m-1} \cap [A_m, B_m] = \{A_m\}$  (в этом случае мы выкидываем ребро  $[A_m, B_m]$  вместе с висячей вершиной  $B_m$ ).

Если  $m - 1 > 0$ , сделаем те же построения с лесом  $X_{m-1}$ . В результате получим ребро  $[A_{m-1}, B_{m-1}]$  леса  $X_{m-1}$  и новый лес  $X_{m-2}$  такой, что  $X_{m-1} = X_{m-2} \cup [A_{m-1}, B_{m-1}]$ . Снова имеем две возможности:  $X_{m-2} \cap [A_{m-1}, B_{m-1}] = \emptyset$  или  $X_{m-2} \cap [A_{m-1}, B_{m-1}] = \{A_{m-1}\}$ .

Продолжая этот процесс до тех пор, пока не исчерпаем все ребра леса  $X_m$ , мы представим  $X_m$  в виде объединения последовательно отрезков  $[A_1, B_1], \dots, [A_m, B_m]$ , удовлетворяющей условию упражнения 3.12, поэтому, в силу этого упражнения, любые две точки множества  $\mathbb{R}^2 \setminus X_m = \mathbb{R}^2 \setminus G$  можно соединить ломаной, не пересекающей  $G$ , следовательно, это множество линейно связно.  $\square$

**Теорема 4.21** (Формула Эйлера). Пусть  $G$  — произвольный плоский граф,  $v$ ,  $e$ ,  $f$  и  $k$  — количества его вершин, ребер, граней и связных компонент. Тогда

$$v - e + f = 1 + k.$$

*Доказательство.* Мы докажем формулу Эйлера в предположении, что все ребра графа  $G$  — ломаные. Так же, как и в доказательстве предложения 4.20, заменим граф на такой, у которого все ребра — прямолинейные отрезки. Отметим, что при такой замене не меняется число граней и связных компонент, а количества ребер и вершин увеличиваются на одно и то же число, поэтому формула Эйлера верна или нет одновременно для исходного и результирующего графов. Новый граф по-прежнему будем обозначать через  $G$ .

Пусть в графе  $G$  имеется цикл  $v_1 v_2 v_3 \dots$ , где  $v_k$  — последовательно проходящие вершины. Рассмотрим первую вершину  $v_i$ , которая совпадает с некоторой “предыдущей” вершиной  $v_j$ ,  $j < i$ . Положим  $C = v_j v_{j+1} \dots v_i$ , тогда  $C$  — замкнутая ломаная без самопересечений. Посмотрим, что произойдет при выбрасывании из графа  $G$  одного из ребер этой ломаной, для определенности рассмотрим ребро  $e = v_j v_{j+1}$ . Количество связных компонент графа при этом не меняется, количество вершин не меняется, количество ребер уменьшается на единицу. Если мы докажем, что количество граней (компонент линейной связности дополнения к графу в плоскости) тоже уменьшается на единицу, то формула Эйлера для этих двух графов выполняется или не выполняется одновременно.

По теореме 3.7, ломаная  $C$  разбивает плоскость на две компоненты. Пусть  $e$  — произвольное ребро цикла  $C$ , и  $P$  — внутренняя точка ребра  $e$ . Пусть  $G'$  — граф, полученный из  $G$  выбрасыванием ребра  $e$ . Так как  $P$  не содержится в  $G'$ , а  $G'$  равен объединению конечного числа отрезков, расстояние  $\rho(P, G')$  от точки  $P$  до графа  $G'$  положительно.

Пусть  $\varepsilon_P$  — произвольное положительное число, меньшее  $\rho(P, G')$ . Положим  $U_P = U_{\varepsilon_P}(P)$ . Тогда круг  $U_P$  не пересекает  $G'$ , поэтому  $U_P \cap G = U_P \cap e$  представляет собой диаметр круга  $U_P$ . Кроме того,  $U_P$  подходит под определение одноименного круга из леммы 4.1, в соответствии с которой точки из компонент множества  $U_P \setminus C = U_P \setminus e$  лежат в разных гранях графа  $G$  (каждая ломаная, их соединяющая, обязана пересекать  $C$ ). Таким образом, выбрасывание из  $G$  ребра  $e$  приводит к уменьшению числа граней (точки тех двух граней  $F_1$  и  $F_2$ , в которых лежат компоненты  $U_P \setminus C$ , до выбрасывания ребра  $e$  нельзя было соединить ломаной, не пересекая  $G$ , а после выбрасывания — можно).

Покажем, что при выбрасывании ребра  $e$  из графа  $G$  остальные грани не изменятся. Пусть точки  $A$  и  $B$  до выбрасывания ребра  $e$  нельзя было соединить друг с другом ломаной, а после выбрасывания — можно. Пусть  $L$  — такая ломаная. Легко видеть, что  $L$  пересекает ребро  $e$  по некоторым внутренним точкам. Рассмотрим участок  $L'$  ломаной  $L$  от точки  $A$  до первого пересечения  $R$  с ребром  $e$ . Выберем окрестность  $U_R$  точно так же, как мы выбрали выше окрестность  $U_P$ . Затем выберем произвольную точку  $S \in U_R \cap L'$ .

Рассмотрим отрезок  $[P, R]$ . В силу того, что  $[P, R] \cap G' = \emptyset$ , имеем  $\rho([P, R], G') > 0$ . Выберем положительное  $\delta$ , меньше  $\rho([P, R], G')$ ,  $\varepsilon_P$  и  $\varepsilon_R$ . Сместим отрезок  $[P, R]$  перпендикулярно ребру  $e$  на расстояние  $\delta/2$ . В результате получим отрезок  $[P', R']$ . Направление смещения выберем так, чтобы  $R'$  и  $S$  оказались в одной компоненте множества  $U_R \setminus G = U_R \setminus e$ . В силу выбора величины  $\delta$ , точка  $P'$  лежит в  $U_P \setminus G$ . Но тогда ломаная  $SR'P'$  не пересекает  $G$ , так что  $S$  лежит в той же грани, что и  $P'$ , т.е. в одной из граней  $F_1$  и  $F_2$ . Аналогичным образом рассматривается точка  $B$ .

Итак, мы показали, что при выбрасывании ребра  $e$  количество граней графа  $G$  уменьшается на единицу. Продолжая эти рассуждения и последовательно разрушая циклы графа  $G$ , мы получим граф  $H$ , в котором столько же компонент связности, сколько их в графе  $G$ , причем в графе  $H$  нет циклов, и для него формула Эйлера верна или неверна одновременно с графом  $G$ . Компоненты связности графа  $H$  являются деревьями, т.е.  $H$  — лес.

По предложению 4.20, граф  $H$  имеет ровно одну грань. Кроме того, по решению упражнения 1.6, каждое дерево содержит на одно ребро меньше, чем число его вершин, поэтому если  $e_1, \dots, e_k$  — число ребер в деревьях леса  $H$ , а  $v_1, \dots, v_k$  — количества вершин в этих деревьях,

то  $v_i - e_i = 1$ , поэтому

$$v - e + f = \sum_{i=1}^k v_i - \sum_{i=1}^k e_i + 1 = k + 1.$$

□

Напомним, что простой граф с  $n$  вершинами, у которого каждая пара вершин соединяется ребром, называется *полным* и обозначается через  $K_n$ .

**Следствие 4.22.** *Граф  $K_5$  непланарный.*

*Доказательство.* Предположим, что граф  $K_5$  планарный, и пусть  $G$  — некоторая его реализация в виде плоского графа. Тогда по формуле Эйлера  $5 - 10 + f = 1 + 1$ , т.е.  $f = 7$ . С другой стороны, каждый цикл в простом графе имеет не менее 3 ребер, поэтому, если  $e_i$  — число ребер  $i$ -ой грани, то  $\sum_{i=1}^f e_i \geq 3f = 21$ . Однако, так как каждое ребро входит не более чем в две грани, предыдущая сумма не превосходит  $2e = 20$ , противоречие. □

## 4.4 Планарные графы. Критерий Понтрягина–Куратовского

При исследовании планарности графов вершины степени 2 не играют никакой роли. Действительно, если  $G$  — плоский граф, то разбиение любого его ребра на части добавлением к множеству вершин некоторых точек этого ребра не меняет граф как подмножество плоскости. Обратное, если есть два ребра, которые имеют общую вершину степени 2, то эту вершину можно выкинуть из множества вершин, а ребра — склеить в одно, большее ребро. Графы, которые отличаются лишь вершинами степени 2, называются гомеоморфными. Дадим формальное определение.

**Определение 4.23.** Пусть  $G = (V, E, \partial)$  — произвольный граф и  $e \in E$  — некоторое его ребро. Пусть  $w$  не содержится в  $V$ , а  $e_1$  и  $e_2$  не содержатся в  $E$ . Рассмотрим граф  $G' = (V', E', \partial')$ , положив  $V' = V \cup \{w\}$  и  $E' = (E \setminus \{e\}) \cup \{e_1, e_2\}$ . Отображение  $\partial'$  положим равным  $\partial$  на  $E \setminus \{e\}$ , а на  $e_1$  и  $e_2$  зададим его так:

- (1) если  $\partial(e) = \{v\}$ , то  $\partial'(e_1) = \partial'(e_2) = \{v, w\}$ ;

(2) если же  $\partial(e) = \{u, v\}$ , то  $\partial'(e_1) = \{u, w\}$ ,  $\partial'(e_2) = \{v, w\}$ .

Будем говорить, что граф  $G'$  получен из графа  $G$  *подразбиением его ребра  $e$* . Графы  $G$  и  $H$  называются *гомеоморфными*, если из них многократными подразделениями ребер можно получить изоморфные графы.

На рис. 4.4 показаны два плоских графа. Кругами поменьше обозначены их вершины. Хотя, как подмножества плоскости, эти графы гомеоморфны, тем не менее, их комбинаторные структуры разные: они отличаются расположением вершин степени 2. Кругами побольше обозначены добавленные вершины степени 2 (некоторые ребра подразбиты). В результате получаем изоморфные графы.

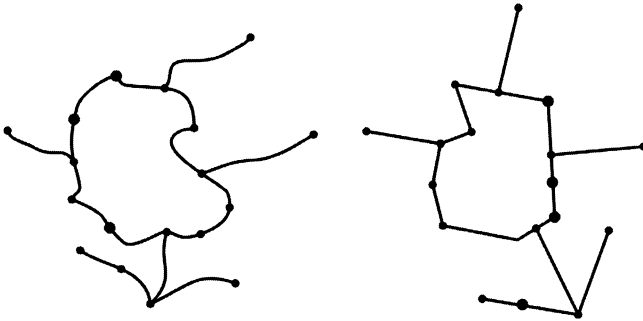


Рис. 4.4: Подразбиение ребер и гомеоморфность графов

**Теорема 4.24** (Понтрягин–Куратовский). *Граф  $G$  является планарным тогда и только тогда, когда никакой его подграф не гомеоморфен  $K_{3,3}$  или  $K_5$ .*

Доказательство в одну сторону — а именно, доказательство непланарности графа, содержащего подграф, гомеоморфный  $K_{3,3}$  или  $K_5$ , очевидно после того, как мы доказали непланарность  $K_{3,3}$  и  $K_5$ , см. следствия 4.13 и 4.22.

Доказательство в другую сторону намного сложнее.

Приведем некоторые следствия.

**Следствие 4.25.** *Полный граф  $K_n$  планарен тогда и только тогда, когда  $n = 1, 2, 3$  или  $4$ .*

*Доказательство.* Действительно, при  $n \leq 4$  легко построить соответствующую реализацию на плоскости. При  $n > 4$  граф  $K_n$  содержит подграф, изоморфный  $K_5$ .  $\square$

**Следствие 4.26.** *Граф  $K_{p,q}$  является планарным тогда и только тогда, когда  $\min(p, q) \leq 2$ .*

*Доказательство.* Действительно, при  $\min(p, q) \leq 2$  легко построить соответствующие реализации на плоскости. При  $\min(p, q) \geq 3$  граф  $K_{p,q}$  содержит подграф, изоморфный  $K_{3,3}$ .  $\square$

## Литература к главе 4

- [1] Прасолов В.В. *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии*, 2004, изд-во МЦНМО.
- [2] Емеличев В.А. и др. *Лекции по теории графов*. М.: Ленанд/URSS, 2015.

## Упражнения к главе 4

### Упражнение 4.1.

- (1) Докажите, что любой граф имеет реализацию в пространстве  $\mathbb{R}^3$  в виде геометрического графа без самопересечений, ребра которого — ломаные.
- (2) Докажите, что простой граф имеет реализацию в пространстве  $\mathbb{R}^3$  в виде геометрического графа без самопересечений, ребра которого — прямолинейные отрезки.

**Упражнение 4.2.** Используя формулу Эйлера, покажите, что граф  $K_{3,3}$  непланарный.

**Упражнение 4.3.** Не используя формулу Эйлера, выведите из леммы 4.2, что граф  $K_5$  непланарный.

**Упражнение 4.4.** Пусть  $G$  — плоский связный простой граф, имеющий  $v$  вершин,  $e$  ребер и  $f$  граней.

- (1) Используя формулу Эйлера, покажите, что при  $v \geq 3$  выполняется  $\frac{3}{2}f \leq e \leq 3v - 6$ .
- (2) Покажите, что  $G$  содержит вершину, степень которой не превосходит 5.

**Упражнение 4.5.** Пусть  $G$  — плоский связный простой граф. Покажите, что  $G$  не может состоять из 10 вершин, степень каждой из которых равна 5.

**Упражнение 4.6.** Опишите все плоские связные простые графы, вершины которых имеют одну и ту же степень  $d \geq 3$ , каждая грань ограничена одним и тем же числом  $k \geq 3$  ребер и каждое ребро лежит ровно в двух гранях.

**Определение 4.27.** Пусть  $G$  — простой граф. *Окружением*  $\mathcal{N} = \mathcal{N}(v)$  вершины  $v$  графа  $G$  назовем следующий граф: его вершины — это все вершины из  $G$ , каждая из которых соединена с  $v$  некоторым ребром; его ребра — все ребра графа  $G$ , соединяющие выбранные вершины.

**Определение 4.28.** Пусть  $\mathcal{C} = \{Col_i\}$  — некоторое множество, элементы которого будем называть *цветами*. Каждое отображение  $\nu: V \rightarrow \mathcal{C}$  будем называть *раскраской графа*  $G = (V, E, \partial)$  *цветами из множества*  $\mathcal{C}$ . При этом будем говорить, что *вершина*  $v$  *покрашена в цвет*  $\nu(v)$ . Раскраска  $\nu$  называется *правильной*, если смежные вершины покрашены разными цветами.

**Упражнение 4.7** (Теорема Хивуда о пяти красках). Докажите, что для каждого плоского простого графа существует правильная раскраска 5 цветами.

**Упражнение 4.8.** Докажите, что каждый планарный граф имеет реализацию в виде плоского графа, ребра которого — ломаные.

# Глава 5

## Многогранники

**План.** Многоугольник, ограниченным замкнутой ломаной без самопересечений, внутренность, внешность и граница многоугольника, пространственный многоугольник, плоскость многоугольника, многогранная поверхность, многоугольники, смежные по ребру, цепочка многоугольников, грани, ребра и вершины многогранной поверхности, инцидентные элементы многогранной поверхности, граничные и внутренние ребра многогранной поверхности, теорема Жордана для замкнутой многогранной поверхности, многогранник, ограниченный замкнутой многогранной поверхностью, внутренность, внешность и граница многогранника, граф и двойственный граф многогранной поверхности, выпуклое подмножество  $\mathbb{R}^n$ , выпуклый многоугольник, выпуклый многогранник, геометрическая реализация графа многогранной поверхности с выпуклыми гранями, планарность графа и двойственного графа выпуклого многогранника, формула Эйлера для выпуклых многогранников, правильный многогранник, платоновы тела, ёж выпуклого многогранника, теорема Минковского о еже, многоугольник на поверхности выпуклого многогранника, внутренность, внешность, граница, угол многоугольника на поверхности выпуклого многогранника.

### 5.1 Многоугольники

Теорема 3.7 утверждает, что для каждой замкнутой ломаной  $L \subset \mathbb{R}^2$  без самопересечений множество  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus L$  состоит из двух компонент. Также в доказательстве этой теоремы мы определили функцию  $\eta(P)$  точек множества  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus L$ , которая на одной из компонент равна 0, а на другой 1. Обозначим эти компоненты через  $\Omega_k$ ,  $k = 0, 1$ , так чтобы на  $\Omega_k$  функция  $\eta$  принимала значение  $k$ . Напомним, что для вычисления  $\eta(P)$  мы вводили специальные декартовы координаты  $x$ ,  $y$ , в которых все вершины ломаной  $L$  имели разные  $x$ -координаты.

**Следствие 5.1.** *Множество  $\Omega_1$  ограничено, а множество  $\Omega_0$  неограничено. Функция  $\eta$  не зависит от выбора декартовых координат  $x$ ,  $y$ .*



*Доказательство.* Так как ломаная  $L$  состоит из конечного числа отрезков, она представляет собой ограниченное подмножество плоскости, т.е. существует открытый круг  $U_r(P)$  радиуса  $r > 0$  с центром в некоторой точке  $P \in \mathbb{R}^2$  такой, что  $L \subset U_r(P)$ , см. рис. 5.1. Выберем точку  $Q \in \mathbb{R}^2$  на граничной окружности круга  $U_r(P)$  так, чтобы вектор  $\vec{PQ}$  был сонаправлен с осью  $y$ . Тогда луч  $\ell_Q$  не имеет с открытым кругом  $U_r(P)$  общих точек, а следовательно, не пересекает  $L$ , так что  $\eta(Q) = 0$  и, значит,  $Q \in \Omega_0$ . Так как для любой точки  $Q' \in \ell_Q$  луч  $\ell_{Q'}$  также не пересекает  $L$ , множество  $\Omega_0$  содержит луч  $\ell_Q$  и поэтому неограничено.

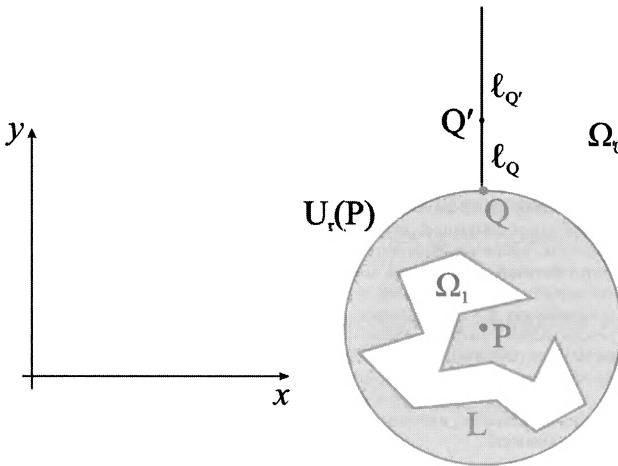


Рис. 5.1: Ломаная разбивает плоскость на ограниченную и неограниченную части

Дополнение к кругу  $U_r(P)$  линейно связно (предъявите в явном виде кривую, соединяющую данные произвольные точки дополнения), поэтому оно содержится в  $\Omega_0$ . Но тогда  $\Omega_1$  содержится в  $U_r(P)$  и, следовательно, ограничено.

Так как ограниченность и неограниченность множеств  $\Omega_i$  не зависит от выбора декартовых координат  $x, y$ , функция  $\eta$  от выбора этих координат тоже не зависит.  $\square$

**Определение 5.2.** Многоугольником  $F$ , ограниченным замкнутой ломаной  $L \subset \mathbb{R}^2$  без самопересечений, называется объединение  $L$  и ограниченной компоненты  $\Omega_1$  множества  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus L$ . Принято также

говорить, что ломаная  $L$  ограничивает  $\Omega_1$ . Ограниченная компонента  $\Omega_1$  называется *внутренностью*  $F$  и обозначается через  $\text{Int } F$ , неограниченная  $\Omega_0$  — *внешностью*  $F$  и обозначается через  $\text{Out } F$ , а ломаная  $L$  — *границей*  $F$  и обозначается через  $\partial F$ .

**Замечание 5.3.** Так как ломаная — замкнутое подмножество плоскости, граница  $\partial F$  многоугольника  $F$  замкнута, поэтому ее дополнение  $\Omega_0 \cup \Omega_1$  — открыто, т.е. вместе с каждой точкой содержит и некоторый открытый круг с центром в этой точке. Но круг — линейно связное множество, поэтому он целиком содержится в той компоненте  $\Omega_i$ , которой принадлежит его центр. Таким образом, внутренность  $\text{Int } F$  и внешность  $\text{Out } F$  многоугольника  $F$  также являются открытыми множествами, а сам многоугольник  $F = \mathbb{R}^2 \setminus \text{Out } F$  — замкнутым множеством.

## 5.2 Многогранные поверхности.

### Определение многогранников

Пусть  $\pi$  — (аффинная) плоскость в  $\mathbb{R}^3$ , т.е. множество точек вида  $\xi + v$ , где  $v$  пробегает некоторое двумерное линейное подпространство  $V \subset \mathbb{R}^3$ , а  $\xi$  — фиксированная точка из  $\mathbb{R}^3$ . Ясно, что все те объекты и построения, которые мы делали в стандартной евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$ , можно проделать и в плоскости  $\pi$ .

**Определение 5.4.** *Пространственным многоугольником* будем называть многоугольник, построенный в некоторой аффинной плоскости  $\pi \subset \mathbb{R}^3$ , при этом  $\pi$  назовем *плоскостью многоугольника*.

**Замечание 5.5.** Аналогичным образом определяется любая плоская фигура, лежащая в пространстве, например, окружность, круг и т.д. Кроме того, говоря про внутренние и внешние точки пространственного многоугольника  $F \subset \pi$ , мы будем понимать соответствующие точки из  $\text{Int } F \subset \pi$  и  $\text{Out } F \subset \pi$ .

**Замечание 5.6.** Каждый пространственный многоугольник  $F$ , так же, как и его граница  $\partial F$ , являются замкнутыми подмножествами не только плоскости, в которой они лежат, но и всего пространства  $\mathbb{R}^3$ . Однако внутренность  $\text{Int } F$  и внешность  $\text{Out } F$  открытыми в  $\mathbb{R}^3$  не являются (проверьте).

**Определение 5.7.** *Многогранной поверхностью*  $\mathcal{F}$  в  $\mathbb{R}^3$  называется конечное семейство  $\{F_i\}$  пространственных многоугольников  $F_i \subset \mathbb{R}^3$ , удовлетворяющее следующим условиям:

- (1) для каждой пары различных многоугольников  $F_i$  и  $F_j$  их пересечение  $F_i \cap F_j$  или пусто, или состоит из одной, общей для них вершины, или из одного, общего для них ребра; если  $F_i$  и  $F_j$  имеют общее ребро  $e$ , то они называются *смежными по  $e$* ;
- (2) для каждого многоугольника  $F_i$  и каждого его ребра  $e$  существует не более одного многоугольника  $F_j$ , смежного с  $F_i$  по  $e$ ;
- (3) для каждой пары различных многоугольников  $F$  и  $F'$  существует последовательность многоугольников  $F_{i_1}, \dots, F_{i_m}$  такая, что  $F_{i_1} = F$ ,  $F_{i_m} = F'$ , и при каждом  $1 < k \leq m$  многоугольники  $F_{i_{k-1}}$  и  $F_{i_k}$  смежны; такую последовательность будем называть *цепочкой многоугольников, соединяющих  $F$  и  $F'$* ;
- (4) для каждой пары многоугольников  $F$  и  $F'$ , пересекающихся по вершине, существует соединяющая их цепочка, все многоугольники которой также содержат эту вершину;
- (5) никакие два смежных многоугольника  $F_i$  и  $F_j$  не лежат в одной плоскости.

Многоугольники  $F_i$  называются *гранями  $\mathcal{F}$* , отрезки в  $\mathbb{R}^3$ , совпадающие с ребрами граней, — *ребрами  $\mathcal{F}$* , а точки в  $\mathbb{R}^3$ , совпадающие с концами ребер, — *вершинами  $\mathcal{F}$* .

На рис. 5.2 приведены примеры семейств пространственных многоугольников, которые не образуют многогранные поверхности: в каждом из этих примеров не выполняется одно из условий определения 5.7. Разберем эти примеры более подробно.

- (1) Пример (а) не является многогранной поверхностью: многоугольники  $F_i$  и  $F_j$  пересекаются по двум ребрам  $e_1$  и  $e_2$ , так что нарушается пункт (1).
- (2) Пример (б) не является многогранной поверхностью, так как там общее ребро  $e$  для многоугольников  $F_i$  и  $F_j$  является также общим и для ряда других многоугольников, поэтому нарушается пункт (2).
- (3) Пример (в) не является многогранной поверхностью, так как многоугольники из “верхней группы” невозможно соединить с многоугольниками из “нижней группы” цепочкой многоугольников, так что нарушается пункт (3).

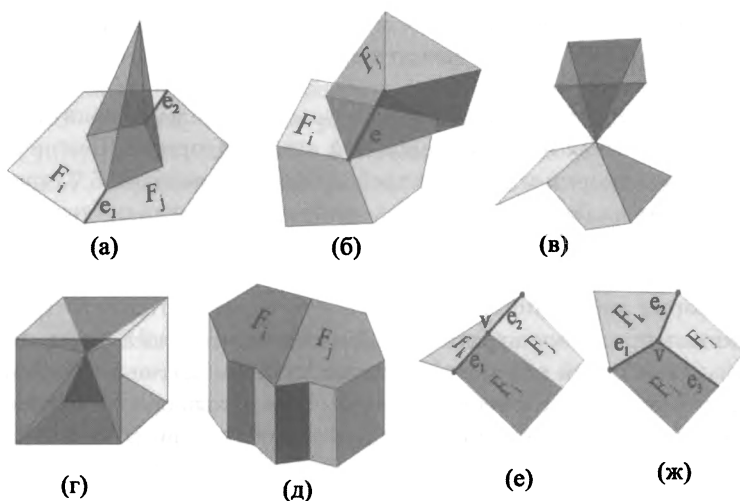
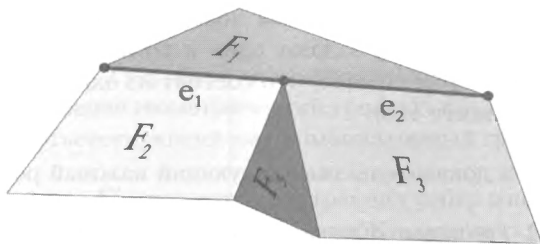


Рис. 5.2: К определению многогранной поверхности

- (4) Пример (г) не является многогранной поверхностью, так как многоугольник из “левой группы” имеет с многоугольником из “правой группы” общую вершину, но их невозможно соединить цепочкой, в которой все многоугольники содержали бы эту вершину; таким образом, здесь нарушается пункт (4).
- (5) Примеры (д)–(ж) не являются многогранными поверхностями, так как в каждом из них смежные грани  $F_i$  и  $F_j$  лежат в одной плоскости, т.е. нарушается пункт (5).

Рис. 5.3: Ребра  $e_1$  и  $e_2$  грани  $F_1$  многогранной поверхности лежат на одной прямой

Обратите внимание, что два соседних ребра одной грани многогранной поверхности могут лежать на одной прямой, см. рис. 5.3.

**Замечание 5.8.** Мы дали столь “жесткое” определение многогранной поверхности, чтобы избежать сложной комбинаторики. Тем не менее, в более общей теории многие из требований определения 5.7 опускают или заменяют на более слабые. Так, например, иногда рассматривают многогранные поверхности с самопересечениями, или, скажем, отказываются от условия того, что смежные грани не лежат в одной плоскости (в теории изгибаний это используется в доказательстве теоремы, объясняющей, почему игра на аккордеоне невозможна, если сделать жесткими все грани его меха). Однако такие ослабления требований приводят к усложнению теории, например, отказываясь от условия (5), мы приходим к неоднозначности представления в виде многогранной поверхности: теперь каждую грань можно разбить на еще более мелкие грани.

**Определение 5.9.** Пусть  $\mathcal{F}$  — многогранная поверхность. Если вершина (или ребро)  $\mathcal{F}$  принадлежит грани, такие вершина и грань (ребро и грань) называются *инцидентными*. Ребро  $\mathcal{F}$ , инцидентное только одной грани, называется *граничным*, а инцидентное двум граням — *внутренним* (заметим, что других ребер в многогранной поверхности нет в силу пункта (2) из определения 5.7). Многогранная поверхность без граничных ребер называется *замкнутой*.

**Замечание 5.10.** Мы будем иногда отождествлять многогранную поверхность  $\mathcal{F}$  с подмножеством  $\mathbb{R}^3$ , равным объединению всех граней из  $\mathcal{F}$ . Именно в этом смысле будем понимать фразу “пусть  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$  — многогранная поверхность”. Отметим, что каждая многогранная поверхность, рассматриваемая как подмножество, имеет единственное представление в виде многогранной поверхности — точнее, если две многогранные поверхности задают одно и то же подмножество в  $\mathbb{R}^3$ , то они совпадают в том смысле, что состоят из одних и тех же многоугольников (докажите это).

Приведем без доказательства следующий важный результат.

**Теорема 5.11** (теорема Жордана для замкнутой многогранной поверхности). Пусть  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$  — замкнутая многогранная поверхность. Тогда  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{F}$  состоит из двух компонент. Одна из этих компонент является ограниченным подмножеством  $\mathbb{R}^3$ , а другая — нет.

**Определение 5.12.** Пусть  $\mathcal{F}$  — замкнутая многогранная поверхность, а  $\Omega$  — ограниченная компонента множества  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{F}$ . Тогда  $W = \mathcal{F} \cup \Omega$  называется *многогранником, ограниченным  $\mathcal{F}$* , или *многогранником с границей  $\mathcal{F}$*  (границу  $\mathcal{F}$  многогранника  $W$  будем также обозначать через  $\partial W$ ). Кроме того,  $\mathcal{F} = \partial W$  называют также *поверхностью многогранника  $W$* . Ограниченная компонента  $\Omega$  называется *внутренностью многогранника* и обозначается через  $\text{Int } W$ . Оставшаяся, неограниченная компонента множества  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{F}$  называется *внешностью многогранника  $W$*  и обозначается через  $\text{Out } W$ .

**Замечание 5.13.** По замечанию 5.6, каждый пространственный многоугольник является замкнутым подмножеством  $\mathbb{R}^3$ . Следовательно, граница  $\partial W$  многогранника  $W$  — замкнутое подмножество  $\mathbb{R}^3$  и, значит, по аналогии с рассуждениями из замечания 5.3, заключаем, что внутренность  $\text{Int } W$  и внешность  $\text{Out } W$  многогранника  $W$  — открытые подмножества  $\mathbb{R}^3$ , а сам многогранник  $W = \mathbb{R}^3 \setminus \text{Out } W$  — замкнутое подмножество  $\mathbb{R}^3$ . Кроме того, для многогранника  $W$  имеет место аналог леммы 4.1: у каждой точки  $P \in \partial W$  существует такая шаровая окрестность  $U_\varepsilon(P)$ , что множество  $U_\varepsilon(P) \setminus \partial W$  состоит из двух компонент, одна из которых лежит во внутренности  $\text{Int } W$ , а другая — во внешности  $\text{Out } W$  многогранника  $W$ .

## 5.3 Графы, связанные с многогранными поверхностями

Пусть  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$  — многогранная поверхность. Пусть  $V$  обозначает множество вершин  $\mathcal{F}$ , а  $E$  — множество ребер  $\mathcal{F}$ . Так как каждое ребро  $\mathcal{F}$  соединяет некоторые вершины  $\mathcal{F}$ , пара  $(V, E)$  является геометрическим графом.

**Определение 5.14.** *Графом  $G$  многогранной поверхности  $\mathcal{F}$*  называется построенный выше геометрический граф  $(V, E)$ ; таким же образом мы называем соответствующий ему комбинаторный граф, см. рис. 5.4.

Обозначим через  $E'$  множество внутренних ребер многогранной поверхности  $\mathcal{F}$ . Будем рассматривать  $\mathcal{F}$  как множество граней. Напомним, что через  $\mathcal{F}_2$  мы обозначали множество 2-элементных подмножеств  $\mathcal{F}$ . Определим отображение  $\partial: E' \rightarrow \mathcal{F}_2$  следующим образом: если ребро  $e \in E'$  является пересечением граней  $F_i$  и  $F_j$ , то положим  $\partial(e) = \{F_i, F_j\} \in \mathcal{F}_2$ .

**Определение 5.15.** Двойственным графом  $G_d$  многогранной поверхности  $\mathcal{F}$  называется построенный только что комбинаторный граф  $(\mathcal{F}, E', \partial)$ , см. рис. 5.4.

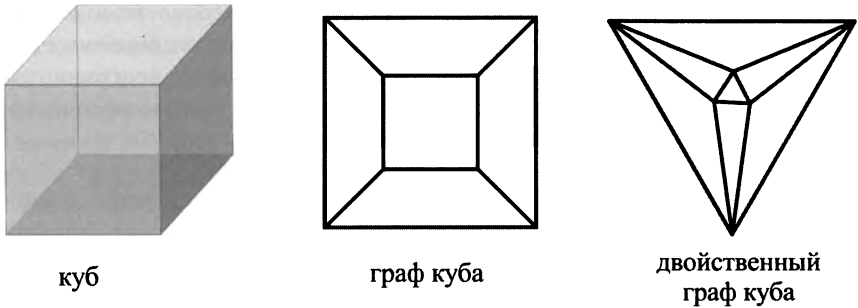


Рис. 5.4: Граф и двойственный граф многогранной поверхности

**Замечание 5.16.** Опишем некоторые свойства графа  $G$  многогранной поверхности  $\mathcal{F}$ .

- (1) Граф  $G$  является простым и связным.
- (2) Степени вершин графа  $G$  не меньше 2. Действительно, каждая вершина  $\mathcal{F}$  является вершиной некоторой грани — многоугольника, поэтому из нее выходит не менее двух ребер.
- (3) Вершина  $v$  графа  $G$  имеет степень 2, если и только если оба выходящих из нее ребра  $e_1$  и  $e_2$  — граничные. В частности, степени вершин графа замкнутой многогранной поверхности не меньше 3. Действительно, никакая пара граней многогранной поверхности не может пересекаться более чем по одному ребру. Поэтому если хотя бы одно из инцидентных  $v$  ребер, скажем  $e_1$ , — внутреннее, то к  $e_1$  примыкает еще одна грань, в которой имеется ребро  $e_3$ , инцидентное  $v$  и отличное от  $e_1$  и  $e_2$ , так что  $\deg v \geq 3$ .

**Замечание 5.17.** Опишем некоторые свойства двойственного графа  $G_d$  многогранной поверхности  $\mathcal{F}$ .

- (1) Граф  $G_d$  является простым и связным. Действительно, различные вершины графа  $G_d$ , соединенные ребром, — это смежные грани. Так как смежные грани имеют ровно одно общее ребро  $\mathcal{F}$ , то граф  $G_d$  не содержит кратных ребер. Связность равносильна условию 3 из определения 5.7.

- (2) *Степени вершин графа  $G_d$ , соответствующего замкнутой многогранной поверхности, не меньше 3.* Действительно, каждая грань  $\mathcal{F}$  содержит не менее 3 ребер.

## 5.4 Выпуклые многогранники

**Определение 5.18.** Подмножество пространства  $\mathbb{R}^n$  называется *выпуклым*, если вместе с каждой парой своих точек оно содержит отрезок, соединяющий эти точки.

**Пример 5.19.** Точка, прямая, плоскость, полупространство, открытый шар, замкнутый шар являются, очевидно, выпуклыми подмножествами пространства. Также любое непустое пересечение выпуклых множеств — выпукло (проверьте).

**Определение 5.20.** Многоугольник и многогранник называются *выпуклыми*, если они представляют собой выпуклые подмножества пространства.

**Теорема 5.21.** *Многогранник  $W \subset \mathbb{R}^3$  выпуклый, если и только если он равен пересечению замкнутых полупространств, ограниченных плоскостями, проходящими через его грани.*

*Доказательство.* Пусть  $F_1, \dots, F_m$  — грани многогранника  $W$ . Обозначим через  $\pi_k$  плоскость, проходящую через  $F_k$ . Предположим сначала, что многогранник совпадает с пересечением замкнутых полупространств, ограниченных плоскостями, проходящими через его грани, т.е. для каждого  $k$  существует такое полупространство  $\Pi_k$ , ограниченное плоскостью  $\pi_k$ , что  $W = \bigcap_{k=1}^m \Pi_k$ . Так как все полупространства выпуклы, а пересечение выпуклых множеств тоже выпукло, многогранник  $W$  — выпуклый.

Пусть теперь  $W$  — выпуклый многогранник. Докажем, что он совпадает с пересечением полупространств, ограниченных плоскостями, проходящими через его грани. Рассмотрим произвольную плоскость  $\pi_k$  и точку  $A \in \text{Int } W$ . Так как  $\text{Int } W$  открыто, существует  $U_\varepsilon(A) \subset \text{Int } W$ . Так как  $U_\varepsilon(A) \not\subset \pi_k$ , существует точка  $B \in U_\varepsilon(A)$ , не принадлежащая  $\pi_k$ . Обозначим через  $\Pi_k$  то полупространство, ограниченное  $\pi_k$ , которое содержит точку  $B$ .

Покажем, что  $W \subset \Pi_k$ . Предположим противное, т.е. что существует  $C \in W$ , для которой  $C \notin \Pi_k$ . Пусть  $D$  — внутренняя точка многоугольника  $F_k$ , тогда в плоскости  $\pi_k$  существует круг  $K$  с центром в  $D$ , содержащийся в  $F_k$ . Рассмотрим конусы  $BK$  и  $CK$  с основаниями  $K$



и вершинами  $B$  и  $C$  соответственно. Эти конусы составлены из отрезков, соединяющих вершины с основаниями, поэтому они содержатся в  $W$ . Так как  $C$  и  $B$  лежат в разных полупространствах относительно  $\pi_k \supset K$ , существует шар  $U_\varepsilon(D)$ , лежащий в  $BK \cup CK$ , поэтому  $U_\varepsilon(D) \subset W$ . Однако для каждой точки из  $\partial W$  выполняется, по аналогии со случаем плоских замкнутых ломаных без самопересечений, что каждый шар с центром в этой точке содержит как точки из  $\text{Int } W$ , так и точки из  $\text{Out } W$ . Это противоречие и доказывает, что  $W \subset \Pi_k$ .

Итак,  $W \subset \bigcap_{k=1}^m \Pi_k$ . Докажем теперь, что  $W = \bigcap_{k=1}^m \Pi_k$ . Предположим противное, т.е. существует точка  $P \in \bigcap_{k=1}^m \Pi_k$  такая, что  $P \notin W$ . Пусть  $Q$  — произвольная точка из  $\text{Int } W$ . Тогда точки  $P$  и  $Q$  лежат в разных компонентах множества  $\mathbb{R}^3 \setminus \partial W$ , поэтому  $[P, Q]$  пересекает некоторую грань  $F_k$ . Пусть  $R$  — некоторая точка из этого пересечения. Так как  $Q \in \text{Int } W \subset \Pi_k$ , то  $Q$  — внутренняя точка полупространства  $\Pi_k$ , т.е.  $Q \notin \pi_k$ . С другой стороны,  $R \in \pi_k$ , т.е. лежит на границе  $\Pi_k$ . Следовательно, точка  $P$  должна лежать в противоположном  $\Pi_k$  полупространстве, ограниченном плоскостью  $\pi_k$ , так что  $P \notin \Pi_k$ , противоречие.  $\square$

**Следствие 5.22.** *Каждая грань выпуклого многогранника  $W$  равна пересечению содержащей ее плоскости и  $W$ .*

*Доказательство.* Пусть  $F$  — произвольная грань  $W$  и  $\pi$  — проходящая через нее плоскость. Так как  $F \subset W$  и  $F \subset \pi$ , то  $F \subset W \cap \pi$ . Докажем теперь обратное включение. Для этого предположим противное, т.е. что существует  $Q \in \text{Out } F$ , которая также лежит в  $W \cap \pi$ .

Обозначим через  $e_1, \dots, e_k$  ребра грани  $F$ , а через  $F_i$  — грань  $W$ , смежную с  $F$  по ребру  $e_i$ . Пусть  $\pi_i$  — плоскость, содержащая  $F_i$ , а  $\Pi_i$  — то полупространство, ограниченное  $\pi_i$ , которое, по теореме 5.21, содержит  $W$ . Так как смежные грани не лежат в одной плоскости,  $\pi_i$  не совпадает с  $\pi$ .

Выберем произвольную точку  $P \in \text{Int } F$ . Тогда  $[P, Q]$  пересекает  $\partial F$ . Пусть  $R$  — точка из этого пересечения, тогда  $R$  принадлежит некоторому ребру  $e_i \subset \pi_i$ . Так как  $P \in W$ , то  $P \in \Pi_i$ .

Покажем, что  $P \notin \pi_i$ . Действительно, предположим, что это не так. Обозначим через  $H_i \subset \pi$  полуплоскость  $\Pi_i \cap \pi$ . Так как  $W \subset \Pi_i$ , то  $F \subset H_i$ . Пусть  $\ell_i$  — прямая, ограничивающая полуплоскость  $H_i$ , т.е.  $\ell_i = \pi_i \cap \pi$ . Но тогда, если  $P \in \pi_i$ , то  $P \in \ell_i$ . Однако каждая круговая окрестность точки  $P \in \pi$  пересекает как  $H_i$ , так и его дополнение в  $\pi$ , т.е. содержит точки, не лежащие в  $F$ . Последнее противоречит тому, что множество  $\text{Int } F$ , в котором содержится  $P$ , открыто в  $\pi$ , так что некоторая круговая окрестность  $P$  должна содержаться в  $\text{Int } F \subset F$ .

Итак, мы доказали, что  $P$  лежит внутри полупространства  $\Pi_i$ , поэтому точки луча  $PQ$ , следующие за точкой  $R$ , не содержатся в  $\Pi_i$  и, значит, не лежат в  $W$ . В частности,  $Q \notin W$ , противоречие.  $\square$

Так как пересечение выпуклых множеств выпукло, следствие 5.22 мгновенно приводит с следующему результату.

**Следствие 5.23.** *Каждая грань выпуклого многогранника — выпуклый пространственный многоугольник.*

**Замечание 5.24.** Если бы мы в определении многогранников не требовали, чтобы смежные грани не лежали в одной плоскости, то следствия 5.22 и 5.23 оказались бы не верными: каждую грань можно было бы разбивать произвольным образом на более мелкие грани, но такие подразделения не нарушают выпуклость многогранника, хотя могут приводить к невыпуклым граням.

**Следствие 5.25.** *Пусть  $W \subset \mathbb{R}^3$  — произвольный выпуклый многогранник,  $F_1, \dots, F_m$  — его грани,  $\pi_i$  — плоскость, содержащая  $F_i$ . Обозначим через  $\Pi_i$  замкнутое полупространство, ограниченное  $\pi_i$  и содержащее  $W$ , и пусть  $\Pi'_i = \Pi_i \setminus \pi_i$  — множество всех внутренних точек  $\Pi_i$ . Пусть  $P$  — некоторая точка из  $W$ . Тогда*

- (1)  $P$  — вершина  $W$ , общая для граней  $F_{i_1}, \dots, F_{i_k}$ , если и только если  $P \in \pi_i$  при  $i \in \{i_1, \dots, i_k\}$ , и  $P \in \Pi'_i$  при всех остальных  $i$ ;
- (2)  $P$  — внутренняя точка ребра  $W$ , общего для граней  $F_{i_1}$  и  $F_{i_2}$ , если и только если  $P \in \pi_i$  при  $i \in \{i_1, i_2\}$ , и  $P \in \Pi'_i$  при всех остальных  $i$ ;
- (3)  $P$  — внутренняя точка грани  $F_{i_1}$ , т.е.  $P \in \text{Int } F_{i_1}$ , если и только если  $P \in \pi_{i_1}$  и  $P \in \Pi'_i$  при  $i \neq i_1$ ;
- (4)  $P$  — внутренняя точка многогранника  $W$ , если и только если  $P \in \Pi'_i$  при всех  $i$ .

*Доказательство.* По следствию 5.22, точка  $P \in W$  лежит в грани  $F_i$  тогда и только тогда, когда она лежит в плоскости  $\pi_i$ . Поэтому  $\{F_{i_1}, \dots, F_{i_k}\}$  — полный набор граней, содержащих точку  $P \in W$ , если и только если  $P$  содержится в плоскостях  $\pi_{i_1}, \dots, \pi_{i_k}$ , а для всех остальных  $i$  — не содержится в полуплоскостях  $\pi_i$ , и, значит, содержится в открытых полупространствах  $\Pi'_i$ . Это соображение доказывает все пункты следствия.  $\square$

Следующая конструкция заимствована нами из [2].

**Конструкция 5.26.** В обозначениях следствия 5.25, выберем в произвольной грани  $F_i$  ее внутреннюю точку  $P$ . По этому же следствию,  $P \in \Pi'_j$  для всех  $j \neq i$ , поэтому шаровая окрестность  $U_P$ , радиус которой меньше расстояния от  $P$  до всех  $\pi_j$ ,  $j \neq i$ , также лежит в каждом таком  $\Pi'_j$ . Пусть  $Q$  — произвольная точка из  $U_P$ , не лежащая в  $\Pi_i$ , в частности,  $Q \notin \pi_i$ . Обозначим через  $\nu: \Pi_i \rightarrow \pi_i$  радиальную проекцию из точки  $Q$ : каждой точке  $S \in \Pi_i$  ставится точка  $R = \nu(S) \in \pi_i$  пересечения луча  $QS$  с  $\pi_i$ , см. рис. 5.5.

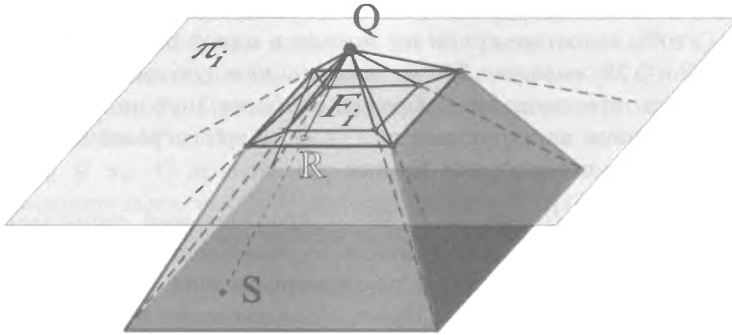


Рис. 5.5: Радиальная проекция границы выпуклого многогранника без грани на плоскость этой грани

**Лемма 5.27.** Ограничение радиальной проекции  $\nu$  на  $\partial W \setminus \text{Int } F_i$  является гомеоморфизмом с образом.

*Доказательство.* Пусть  $R$  — произвольная точка плоскости  $\pi_i$ . Рассмотрим луч  $QR$  и выясним, как устроено пересечение  $QR \cap \partial W$ .

Пусть  $R \in \text{Out } F_i$ , тогда, по следствию 5.22,  $R \notin W$  и, значит, для некоторого  $j \neq i$  выполняется  $R \notin \Pi_j$ , поэтому интервал  $(Q, R)$  пересекает плоскость  $\pi_j$  по некоторой точке  $T$ . Но тогда открытый луч  $TR$  содержится в  $\mathbb{R}^2 \setminus \Pi_j$ , поэтому  $TR \cap W = \emptyset$ . Кроме того,  $(Q, R) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Pi_i$ , поэтому  $(Q, R) \cap W = \emptyset$ , так что в этом случае луч  $QR$  не пересекает  $W$ .

Пусть  $R \in \partial F_i$ . По следствию 5.25, точка  $R$  лежит в некоторой плоскости  $\pi_j$ ,  $j \neq i$ , поэтому все точки луча  $QR$ , следующие за точкой  $R$ , лежат в  $\mathbb{R}^3 \setminus \Pi_j$ , следовательно, все они не принадлежат  $W$ . Кроме того,  $(Q, R) \subset \mathbb{R}^3 \setminus \Pi_i$ , поэтому  $(Q, R) \cap W = \emptyset$ , так что  $QR \cap W$  состоит ровно из одной точки, а именно, точки  $R$ .

Наконец, пусть  $R \in \text{Int } F_i$ . Выберем шаровую окрестность  $U_R$  точки  $R$  так же, как мы выбирали  $U_P$ . Тогда точки из  $QR \cap U_R$ , следующие на луче  $QR$  за точкой  $R$ , лежат во всех  $\Pi'_j$ , поэтому все они принадлежат внутренности  $W$ . Обозначим через  $S$  последнюю точку луча  $QR$ , лежащую в  $W$ , рис. 5.5. В силу сказанного выше,  $S \neq R$ . Покажем, что интервал  $(R, S)$  состоит из внутренних точек для  $W$ . Действительно, если на нем имеется некоторая точка  $T \in \partial W$ , то  $T$  содержится в некоторой плоскости  $\pi_j$ , но тогда все точки открытого луча  $TS$  не содержатся в  $\Pi_j$  и, в частности, в  $W$ , поэтому  $T \notin W$ . Итак, мы доказали, что  $QR \cap \partial W$  состоит в рассматриваемом случае из двух точек:  $R$  и  $S$ . Отсюда и из разобранных выше случаев вытекает, что ограничение  $\nu$  на  $\partial W \setminus \text{Int } F_i$  — взаимно однозначно с образом. Непрерывность этого ограничения и отображения, обратного к нему, следует из непрерывности радиальной проекции и вспомогательных утверждений, доказанных при решении упражнения 2.10.  $\square$

**Следствие 5.28.** *Граф выпуклого многогранника планарен.*

*Доказательство.* По лемме 5.27, границу  $\partial W$  выпуклого многогранника, из которой выкинута внутренность некоторой грани  $F$ , можно гомеоморфно отобразить на некоторое подмножество плоскости  $\pi$ , проходящей через  $F$ . При таком отображении граф многогранника  $W$  отображается на некоторый плоский граф, так что граф многогранника планарен.  $\square$

**Конструкция 5.29.** Построим *геометрическую реализацию двойственного графа*  $G_d$  многогранной поверхности  $\mathcal{F}$ , все грани которой — выпуклые многоугольники, в частности, границы  $\mathcal{F}$  выпуклого многогранника. Для этого возьмем в каждой грани  $F_i$  многогранной поверхности  $\mathcal{F}$  по внутренней точке  $P_i$  и примем эти точки за вершины геометрического графа. Соединим каждую точку  $P_i$  с серединами тех сторон содержащей ее грани, которые соответствуют внутренним ребрам многогранной поверхности. Получим набор отрезков, пересекающихся только по  $P_i$ . Точки  $P_i$  из смежных граней соединены двузвенными ломаными. Эти ломаные возьмем в качестве ребер геометрического графа. Ясно, что комбинаторная структура полученного графа изоморфна  $G_d$ , так что он является геометрической реализацией  $G_d$ , см. рис. 5.6.

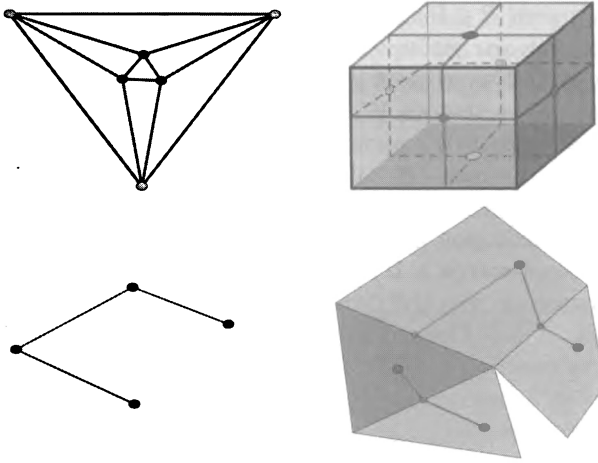


Рис. 5.6: Двойственный граф многогранной поверхности, его геометрическая реализация

**Замечание 5.30.** Несколько более сложно определяется геометрическая реализация двойственного графа произвольной многогранной поверхности (дайте соответствующее определение).

**Предложение 5.31.** Двойственный граф выпуклого многогранника  $W$  планарен.

*Доказательство.* Приведем еще одну конструкцию из [2]. В обозначениях следствия 5.25, выберем произвольную точку  $P \in \text{Int } W$ . По замечанию 5.13, существует шар  $U_\varepsilon(P)$ , содержащийся в  $\text{Int } W$ . Уменьшая  $\varepsilon$ , если необходимо, добьемся того, чтобы сфера  $S_\varepsilon^2(P)$ , ограничивающая этот шар, также лежала в  $\text{Int } W$ .

Пусть  $\mu: \mathbb{R}^3 \setminus \{P\} \rightarrow S_\varepsilon^2(P)$  — радиальная проекция на  $S_\varepsilon^2(P)$  с центром в  $P$ :

$$\mu(Q) = P + \varepsilon \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|}.$$

Покажем, что  $\mu$  отображает  $\partial W$  взаимно однозначно на  $S_\varepsilon^2(P)$ .

Действительно, если  $Q$  — произвольная точка из  $S_\varepsilon^2(P)$ , то луч  $PQ$  содержит некоторую точку  $R \in \text{Out } W$ , так как  $W$  — ограниченное множество. Но тогда  $[P, R]$  пересекает  $\partial W$ . Пусть  $S$  — некоторая точка из этого пересечения, тогда  $\mu(S) = Q$ . Таким образом, ограничение  $\mu$  на  $\partial W$  сюръективно.

Покажем теперь, что это ограничение инъективно. Предположим, что  $S_1$  и  $S_2$  — различные точки из  $\partial W$ , для которых  $Q = \mu(S_1) = \mu(S_2)$ . Без ограничения общности, будем считать, что  $S_1 \in (Q, S_2)$ . Так как  $S_1 \in \partial W$ , то  $S_1$  лежит в некоторой грани  $F_i$  многогранника  $W$ . Но тогда, в обозначениях следствия 5.25,  $S_1 \in \pi_i$  и  $P \in \Pi'_i$ , поэтому  $S_2$  лежит вне полупространства  $\Pi_i$ , так что  $S_2 \notin W$ .

Итак, мы доказали, что  $\mu$  отображает  $\partial W$  взаимно однозначно на  $S^2$ . Из непрерывности радиальной проекции и вспомогательных утверждений, доказанных при решении задачи 2.10, вытекает, что это отображение — гомеоморфизм.

Рассмотрим геометрическую реализацию  $G$  двойственного графа многогранника  $W$ , описанную в конструкции 5.29. Выберем произвольную точку  $T$  из  $\partial W$ , не принадлежащую  $G$ . По задаче 2.10, существует гомеоморфизм  $\eta$  между  $S^2_\varepsilon(P) \setminus \{\mu(T)\}$  и плоскостью  $\mathbb{R}^2$ , поэтому  $\eta \circ \mu(G)$  — геометрическая реализация двойственного графа многогранника  $W$ , являющаяся плоским графом.  $\square$

## 5.5 Формула Эйлера для многогранников

В данном разделе будем рассматривать выпуклые многогранники  $W$ . По следствию 5.28, графы  $G$  таких многогранников планарны. Пусть  $\nu$  — отображение, построенное в конструкции 5.26, тогда  $\nu(G)$  — связный плоский граф, имеющий столько же вершин, ребер и граней, сколько и многогранник  $W$ , откуда, используя формулу Эйлера из теоремы 4.21, получаем следующий результат.

**Теорема 5.32** (Формула Эйлера для выпуклых многогранников). *Если  $f$ ,  $e$  и  $v$  обозначают количества граней, ребер и вершин выпуклого многогранника, то  $v - e + f = 2$ .*

## 5.6 Правильные многогранники

**Определение 5.33.** Выпуклый многогранник назовем *правильным*, если все его грани — равные правильные пространственные многоугольники, стыкующиеся в вершинах в одном и том же количестве и образующие равные двугранные углы при всех ребрах.

Пусть  $W$  — правильный многогранник,  $G$  — его граф, и  $\nu$ , как и выше, — отображение, построенное в конструкции 5.26. Положим  $G_\nu = \nu(G)$ . Тогда, как уже было отмечено, граф  $G_\nu$  имеет столько же

вершин, ребер и граней, сколько и многогранник  $W$ . Из определения правильного многогранника вытекает, что

- (1)  $G_\nu$  — плоский простой связный граф;
- (2) степени вершин графа  $G_\nu$  одинаковы и не меньше 3;
- (3) каждая грань графа  $G_\nu$  ограничена один и тем же числом ребер, также не меньшим 3;
- (4) каждое ребро графа  $G_\nu$  лежит ровно в двух гранях.

Такие графы мы описали в задаче 4.6. Приведем ответ.

Пусть  $(v, e, f)$  — вектор, компоненты которого равны соответственно количеству вершин, ребер и граней графа  $G_\nu$ , а, значит, и правильного многогранника  $W$ . Тогда эти векторы могут быть только следующих пяти типов:  $(4, 6, 4)$ ,  $(6, 12, 8)$ ,  $(8, 12, 6)$ ,  $(12, 30, 20)$  и  $(20, 30, 12)$ . Оказывается, правильные многогранники каждого из этих пяти типов существуют, см. рис. 5.7. Они называются *платоновыми телами*.

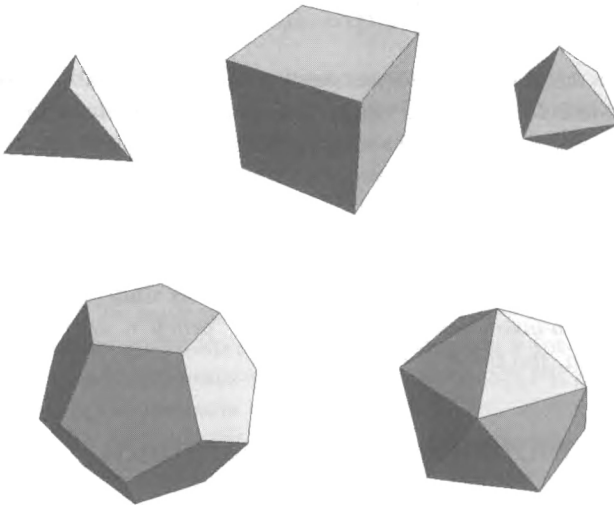


Рис. 5.7: Платоновы тела: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр

На рис. 5.8 приведены графы платоновых тел.

Доказательство существования каждого из этих платоновых тел можно найти, например, в [2].

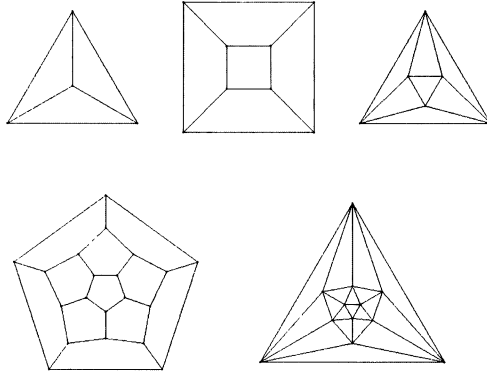


Рис. 5.8: Графы платоновых тел

## 5.7 Теорема о “еже” выпуклого многогранника

Пусть  $W \subset \mathbb{R}^3$  — произвольный выпуклый многогранник. Обозначим через  $F_1, \dots, F_m$  все его грани, через  $N_i$  — единичный вектор, перпендикулярный грани  $F_i$  и направленный наружу многогранника  $W$ , а через  $S_i$  — площадь грани  $F_i$ . Положим  $\xi_i = S_i N_i$ . Семейство векторов  $\{\xi_i\}$  назовем *ежом* многогранника  $W$ . Мы хотим понять, какими свойствами обладают ежи многогранников и сколь однозначно они определяют многогранник. Подробности см. в [4].

**Теорема 5.34.** Пусть  $\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$  — ёж выпуклого многогранника  $W$ . Тогда векторы  $\xi_i$  некопланарны и выполняется  $\sum_{i=1}^m \xi_i = 0$ .

*Доказательство.* Если бы векторы  $\xi_i$  лежали в одной плоскости  $\pi$ , то, по теореме 5.21, многогранник  $W$  был бы равен пересечению полупространств  $\Pi_i$ , ограниченных плоскостями  $\pi_i$ , параллельными прямой, перпендикулярной  $\pi$ , так что  $W$  не был бы ограниченным. Докажем теперь вторую часть теоремы.

Отметим сначала, что величина  $\xi = \sum_i \xi_i$  не меняется при сдвигах многогранника  $W$ . Это дает нам возможность считать, не ограничивая общности, что начало координат  $O$  лежит во внутренности многогранника  $W$ .

Пусть  $P$  — произвольная точка из  $W$ , а  $P_i$  — точка, лежащая в грани  $F_i$ . Тогда расстояние  $h_i$  от точки  $P$  до плоскости, проходящей



через грань  $F_i$ , равно  $\langle N_i, P_i - P \rangle$ , где  $\langle a, b \rangle$  обозначает стандартное скалярное произведение векторов  $a$  и  $b$ .

Обозначим через  $V_i$  пирамиду с основанием  $F_i$  и вершиной  $P$ , через  $v_i$  — объем этой пирамиды, а через  $v$  — объем многогранника  $W$ . Тогда  $v = \sum_i v_i$ . С другой стороны,

$$v_i = \frac{1}{3} h_i S_i = \frac{1}{3} \langle N_i, P_i - P \rangle S_i = \frac{1}{3} \langle \xi_i, P_i - P \rangle,$$

поэтому

$$\begin{aligned} v &= \sum_i \frac{1}{3} \langle \xi_i, P_i - P \rangle = \sum_i \frac{1}{3} \langle \xi_i, P_i \rangle - \sum_i \frac{1}{3} \langle \xi_i, P \rangle = \\ &= \sum_i \frac{1}{3} \langle \xi_i, P_i \rangle - \frac{1}{3} \left\langle \sum_i \xi_i, P \right\rangle = \sum_i \frac{1}{3} \langle \xi_i, P_i \rangle - \frac{1}{3} \langle \xi, P \rangle. \end{aligned}$$

Заметим, что вектор  $\xi$ , величина  $v$  и величина  $\sum_i \frac{1}{3} \langle \xi_i, P_i \rangle$  не зависят от выбора точки  $P$ , поэтому от выбора  $P$  не зависит также и величина  $\langle \xi, P \rangle$ . Так как начало координат  $O$  лежит внутри  $W$ , то некоторая шаровая окрестность  $U_\varepsilon(O)$  точки  $O$  также лежит внутри  $W$ . Значит, для любой точки  $P$  из  $U_\varepsilon(O)$  величина  $\langle \xi, P \rangle$  постоянна и равна  $\langle \xi, O \rangle = 0$ . Покажем, как отсюда вытекает, что  $\xi = 0$ . Предположим противное, т.е. что  $\xi \neq 0$ . Положим  $\lambda = \varepsilon / (2\|\xi\|)$ , тогда  $\lambda \xi \in U_\varepsilon(O)$ , поэтому  $\langle \xi, \lambda \xi \rangle = 0$ , откуда, так как  $\lambda \neq 0$ , имеем  $\langle \xi, \xi \rangle = 0$ , следовательно  $\xi = 0$ .  $\square$

Оказывается, имеет место и обратный результат, доказательство которого сложнее и опирается на теоремы, которые вы будете изучать на следующих курсах.

**Теорема 5.35** (Г. Минковский [5]). Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_m$  — ненулевые некопланарные векторы в  $\mathbb{R}^3$ , никакие два из которых не сонаправлены, причем  $\sum_i \xi_i = 0$ . Тогда существует единственный, с точностью до параллельного переноса, выпуклый многогранник, ёж которого равен  $\{\xi_i\}$ .

**Замечание 5.36.** В теореме 5.35 мы потребовали, чтобы никакие два вектора  $\xi_i$  не были сонаправленными. Это связано с тем, что на многогранную поверхность мы накладываем следующее условие: никакие две ее смежных грани не лежат в одной плоскости. Если же отказаться от этого условия, то требование несонаправленности векторов  $\xi_i$  можно будет опустить.

У теоремы 5.35 имеются обобщения как на многомерный случай, так и на невыпуклые многогранники (см. например [6]).

## Литература к главе 5

- [1] Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.Л. *Многогранники, графы, оптимизация*. М.: Наука, 1981.
- [2] Берже М. *Геометрия*, т. 1–2. М.: Мир, 1984.
- [3] Долбилин Н.П. *Три теоремы о выпуклых многогранниках*. Квант, 2001, N 5, с. 7–12.
- [4] Долбилин Н.П. *Теорема Минковского о многогранниках*. Квант, 2006, N 4, с. 3–8.
- [5] Минковский Г. *Общие теоремы о выпуклых многогранниках*. Успехи мат. наук, 1936, вып. 2, с. 55–71.
- [6] Alexandrov V. *Minkowski-type and Alexandrov-type theorems for polyhedral herissons*, 2002, <http://arXiv:math/0211286v1>.

## Упражнения к главе 5

**Упражнение 5.1.** Пусть  $W$  — выпуклый многогранник, и пусть  $v$ ,  $e$  и  $f$  обозначают количества вершин, ребер и граней этого многогранника. Докажите, что

$$(1) \quad e + 6 \leq 3v;$$

$$(2) \quad e + 6 \leq 3f;$$

$$(3) \quad f + 4 \leq 2v;$$

$$(4) \quad v + 4 \leq 2f;$$

- (5) многогранник  $W$  имеет хотя бы одну треугольную, четырехугольную или пятиугольную грань;
- (6) многогранник  $W$  имеет хотя бы один трехгранный, четырехгранный или пятигранный пространственный угол (т.е. вершину, в которой стыкуются 3, 4 или 5 граней);
- (7) многогранник  $W$  имеет или хотя бы одну треугольную грань, или один трехгранный пространственный угол;
- (8) сумма всех плоских углов граней многогранника  $W$  равна  $2\pi(v-2)$ .

**Упражнение 5.2.**

- (а) Какое минимальное число ребер может иметь многогранник, если известно, что все его грани имеют не меньше 5 ребер?
- (б) Какое минимальное число ребер может иметь многогранник, если известно, что в каждой его вершине сходится не меньше 5 ребер?
- (с) Какое минимальное число ребер может иметь многогранник, если известно, что все его грани имеют не меньше 4 ребер?
- (д) Какое минимальное число ребер может иметь многогранник, если известно, что в каждой его вершине сходится не меньше 4 ребер?
- (е) Какое минимальное число ребер может иметь многогранник, если известно, что все его грани имеют не меньше 3 ребер?
- (ф) Какое минимальное число ребер может иметь многогранник, если известно, что в каждой его вершине сходится не меньше 3 ребер?

**Определение 5.37.** Пусть  $P$  — вершина произвольного многогранника  $W$ , а  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  — величины углов всех граней  $W$  при этой вершине. Тогда *кривизной в вершине  $P$*  называется величина  $K(P) = 2\pi - \sum_i \alpha_i$ .

**Упражнение 5.3.** Докажите, что у выпуклого многогранника сумма кривизн  $K(P)$  по всем его вершинам  $P$  равна  $4\pi$ .

**Упражнение 5.4.** Пусть  $L \subset \mathbb{R}^3$  — замкнутая ломаная без самопересечений, лежащая на границе  $\partial W$  выпуклого многогранника  $W$ . Докажите, что  $\partial W \setminus L$  состоит из двух компонент.

**Определение 5.38.** Пусть  $L \subset \mathbb{R}^3$  — замкнутая ломаная без самопересечений, лежащая на границе  $\partial W$  выпуклого многогранника  $W$ , а  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  — компоненты множества  $\partial W \setminus L$ . Тогда множества  $M_i = L \cup \Omega_i$  называются *многоугольниками на  $\partial W$* . Для многоугольника  $M_i$  точки из  $\Omega_i$  называются *внутренними*, из  $\Omega_j$  — *внешними*, а из  $L$  — *граничными*, где  $\{i, j\} = \{1, 2\}$ . Положим  $\text{Int } M_i = \Omega_i$ ,  $\text{Out } M_i = \Omega_j$  и  $\partial M_i = L$ .

**Определение 5.39.** Пусть  $X$  — многоугольник на поверхности  $\partial W$  выпуклого многогранника  $W$ , а  $P$  — некоторая вершина многоугольника  $X$ . Тогда *угол  $\alpha_P$  многоугольника  $X$  в вершине  $P$*  определяется так. Если  $P$  лежит внутри грани, то  $\alpha_P$  — это угол на плоскости, содержащей эту грань. Если же  $P$  попала или на ребро, или в вершину из  $\partial W$ , то угол в этой вершине складывается из всех углов многоугольников, полученных пересечением  $X$  и содержащих эту вершину граней (конечно, углы рассматриваются в этой вершине).

**Упражнение 5.5.** Рассмотрим  $n$ -угольник  $X$ , лежащий на границе выпуклого многогранника. Докажите, что его сумма углов равна  $\pi(n - 2)$  плюс сумма кривизн  $K(P)$  по всем вершинам многогранника, попавшим внутрь  $X$ .

**Упражнение 5.6.** Сформулируйте и докажите аналог теоремы Минковского для выпуклых многоугольников.

**Упражнение 5.7.** Существует ли тетраэдр с гранями  $F_1, \dots, F_4$  такой, что площадь каждой  $F_i$  равна 1, грани  $F_1$  и  $F_2$  перпендикулярны друг другу, грани  $F_3$  и  $F_4$  также перпендикулярны друг другу, а угол между ребром  $e_{12} = F_1 \cap F_2$  и  $e_{34} = F_3 \cap F_4$  равен  $37^\circ$ ? Указание: воспользуйтесь теоремой Минковского.

**Упражнение 5.8.** Докажите, что выпуклый многогранник центрально симметричен, если и только если для каждой его грани существует параллельная ей грань той же площади. Указание: воспользуйтесь теоремой Минковского.

**Определение 5.40.** Пусть  $X$  — произвольное подмножество  $\mathbb{R}^n$ . Наименьшее по включению выпуклое множество, содержащее  $X$ , называется *выпуклой оболочкой*  $X$  и обозначается через  $\text{conv } X$ . Иными словами,  $\text{conv } X$  — это такое выпуклое подмножество  $\mathbb{R}^n$ , что  $X \subset \text{conv } X$ , и если  $Y \supset X$  — выпуклое подмножество  $\mathbb{R}^n$ , то  $\text{conv } X \subset Y$ .

**Замечание 5.41.** Определение 5.40 и тот факт, что пересечение выпуклых множеств — выпукло, мгновенно влекут, что  $\text{conv } X$  совпадает с пересечением всех выпуклых подмножеств  $\mathbb{R}^n$ , содержащих  $X$ .

**Упражнение 5.9.** Докажите, что выпуклый многогранник совпадает с выпуклой оболочкой множества своих вершин.

## Глава 6

# Элементы сферической геометрии

**План.** Открытые сферические круги, открытые и замкнутые подмножества сферы, непрерывные кривые на сфере, линейная связность и компоненты подмножества сферы, сферическая прямая или большая окружность, сферический отрезок, сферическая ломаная, замкнутая сферическая ломаная, сферическая ломаная без самопересечений, сферическая теорема Жордана, сферический многоугольник, сферическая ломаная, ограничивающая сферический многоугольник, граница, внутренность и внешность сферического многоугольника, дополнительные сферические многоугольники, длина ребра сферического многоугольника, касательная плоскость к сфере, величина угла в вершине сферического многоугольника, конус над множеством, многогранный угол, многогранный угол, соответствующий сферическому многоугольнику, грани и ребра многогранного угла, смежные грани многогранного угла, плоский и двугранный углы многогранного угла, одноугольник, двугульник, выпуклые сферические многоугольники, малый и большой сферический отрезки, длина малого сферического отрезка, дополнительные сферические отрезки, эйлеров многоугольник, его диагонали, расстояние на сфере, окружности на сфере, теоремы о сферических треугольниках: теорема косинусов, теорема Пифагора, неравенство треугольника на длины сторон, теорема синусов, двойственная теорема косинусов, сумма углов.

### 6.1 Сферические фигуры

Пусть  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  — сфера радиуса  $r$  с центром в  $O$  (без ограничения общности, будем считать, что  $O$  — начало координат). Будем рассматривать на  $S^2$  топологию, индуцированную естественной топологией евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$ , см. раздел 2.1.5. База окрестностей этой топологии состоит из множеств (они называются *открытыми сферическими кругами*), которые получаются при пересечении открытых шаров в  $\mathbb{R}^3$  со сферой  $S^2$ . Тем самым для сферы  $S^2$  определены ее *открытые* и *замкнутые* подмножества, непрерывные отображения в

сферу  $S^2$  или из сферы  $S^2$ , в частности, определены *непрерывные кривые на  $S^2$* ; также можно говорить о *линейной связности* и о *компонентах* подмножества сферы  $S^2$ .

В этой лекции мы обсудим свойства “кусочно–линейных” объектов на  $S^2$ , имея в виду аналогичные объекты на плоскости. Некоторые свойства полностью аналогичны (теорема Жордана), некоторые — похожи (теоремы косинусов и синусов), некоторые — совершенно другие (существуют многоугольники с одной или двумя вершинами).

**Определение 6.1.** Будем называть *сферической прямой* или *большой окружностью* любое сечение сферы  $S^2$  плоскостью, проходящей через ее центр.

**Замечание 6.2.** Нетрудно видеть, что сечения сферы всевозможными плоскостями являются плоскими окружностями, среди которых сферические прямые выделяются тем, что они имеют максимально возможный радиус, и этот радиус равен радиусу сферы.

В сферической геометрии большие окружности играют роль прямых на евклидовой плоскости.

**Определение 6.3.** Евклидов круг, ограниченный большой окружностью, называется *большим кругом*.

**Определение 6.4.** Пусть  $P$  и  $Q$  — точки из  $S^2$ . Дуга сферической прямой, соединяющая точки  $P$  и  $Q$ , называется *сферическим отрезком*.

**Замечание 6.5.** Здесь мы сталкиваемся с одним из отличий геометрии сферы от геометрии плоскости. А именно, если точки  $P$  и  $Q \neq P$  не являются диаметрально противоположными, то через них проходит единственная сферическая прямая, а если являются, то таких прямых бесконечно много. Кроме того, точки  $P$  и  $Q$  делят проходящую через них сферическую прямую на две дуги, каждая из которых является сферическим отрезком с концами в  $P$  и  $Q$ .

*Сферическая ломаная* определяется ровно так же, как и обычная ломаная на плоскости, с заменой отрезков на сферические отрезки. Заметим, однако, что сферическая ломаная **не задается однозначно последовательностью своих вершин**: из всех сферических отрезков, соединяющих последовательные вершины, выбирается какой-то один. Тем не менее, все основные понятия, введенные нами при изучении ломаных в евклидовом пространстве, дословно переносятся на сферу, в частности, мы можем говорить о *замкнутой сферической ломаной* и о *сферической ломаной без самопересечений*.

**Замечание 6.6.** К сферическим ломаным отнесем также сферическую прямую, одна из точек которой выбрана в качестве вершины. Такая ломаная является замкнутой и не имеет самопересечений.

Следующая теорема легко доказывается, если воспользоваться стереографической проекцией.

**Теорема 6.7** (Сферическая теорема Жордана). Пусть  $L \subset S^2$  — сферическая ломаная без самопересечений. Тогда если  $L$  не замкнута, то множество  $S^2 \setminus L$  линейно связно, а если  $L$  замкнута, то  $S^2 \setminus L$  состоит из двух компонент.

Напомним, что для плоской замкнутой ломаной без самопересечений одна из компонент, на которые она разбивает плоскость, ограничена, а другая — нет. Для сферы это утверждение неверно, поэтому многоугольник, ограниченный ломаной, определен неоднозначно.

**Определение 6.8.** Пусть  $L \subset S^2$  — замкнутая сферическая ломаная без самопересечений, а  $\Omega$  и  $\Omega'$  — компоненты множества  $S^2 \setminus L$ . Сферическим многоугольником, ограниченным сферической ломаной  $L$ , называется любое из множеств  $W = L \cup \Omega$  и  $W' = L \cup \Omega'$ . Для сферического многоугольника  $W$  множество  $L$  называется его границей и обозначается через  $\partial W$ , множество  $\Omega$  — его внутренностью и обозначается через  $\text{Int } W$ , а множество  $\Omega'$  — его внешностью и обозначается через  $\text{Out } W$  (аналогичные определения имеют место и для  $W'$ ). Сферические многоугольники  $W$  и  $W'$  называются дополнительными друг для друга.

Как и в случае ломаных на плоскости, верен следующий результат.

**Следствие 6.9.** Граница  $\partial W$  сферического многоугольника  $W \subset S^2$  замкнута, внутренность  $\text{Int } W$  и внешность  $\text{Out } W$  — открыты, так что многоугольники  $W$  и  $W'$  замкнуты. Более того, каждая достаточно малая круговая окрестность произвольной точки  $P \in \partial W$  разбивается ломаной  $\partial W$  на две компоненты, причем одна из них лежит в  $\text{Int } W$ , а другая — в  $\text{Out } W$ .

**Замечание 6.10.** Каждое ребро сферического многоугольника представляет собой дугу некоторой пространственной окружности, поэтому для каждого ребра сферического многоугольника стандартным образом определяется его длина.

Теперь определим величину угла сферического многоугольника.

**Определение 6.11.** Пусть  $P \in S^2$  — произвольная точка и  $T_P S^2$  — плоскость, проходящая через  $P$  и перпендикулярная  $OP$ . Тогда  $T_P S^2$  называется *касательной плоскостью к  $S^2$  в точке  $P$* .

**Конструкция 6.12.** Пусть на сфере задан многоугольник  $W$ , ограниченный замкнутой ломаной  $L$  с последовательными вершинами  $A_1, A_2 \dots A_n$ . Пусть  $P$  — одна из его вершин. Рассмотрим окрестность  $U_P$  точки  $P$  (она определяется так же, как и для плоскости:  $U_P$  является пересечением сферы  $S^2$  и открытого шара в  $\mathbb{R}^3$  с центром в точке  $P$ , при этом  $U_P$  не должна содержать других вершин ломаной и точек ребер, не выходящих из  $P$ ). Рассмотрим центральную проекцию  $W \cap U_P$  на касательную плоскость  $T_P S^2$  из центра сферы. Легко видеть, что при такой проекции  $W \cap U_P$  отображается на сектор открытого круга: в самом деле,  $U_P$  проецируется на открытый круг с центром в  $P$ , а пересечения ребер, выходящих из  $P$ , с  $U_P$  проецируются в радиусы этого круга.

**Определение 6.13.** Величина плоского угла, соответствующего построенному сектору, называется *величиной угла в вершине  $P$  сферического многоугольника  $W$* .

Свойства сферических многоугольников тесно связаны со свойствами многогранных углов. Дадим определение многогранного угла.

**Определение 6.14.** Пусть  $X \subset \mathbb{R}^3$  — произвольное множество, и  $P \in \mathbb{R}^3 \setminus X$  — произвольная точка. *Конусом  $PX$  с вершиной  $P$  над множеством  $X$*  называется объединение лучей  $PQ$  по всем  $Q \in X$ .

Из сферической теоремы Жордана легко получается следующий результат.

**Следствие 6.15.** Пусть  $L \subset S^2$  — замкнутая сферическая ломаная без самопересечений,  $\Omega$  и  $\Omega'$  — компоненты множества  $S^2 \setminus L$ , а  $O$  — центр сферы  $S^2$ . Тогда множество  $\mathbb{R}^3 \setminus OL$  состоит из двух компонент  $O\Omega$  и  $O\Omega'$ , где  $OL$ ,  $O\Omega$  и  $O\Omega'$  — конусы над  $L$ ,  $\Omega$  и  $\Omega'$  соответственно.

**Определение 6.16.** Каждое из множеств  $OL \cup O\Omega = OW$  и  $OL \cup O\Omega' = OW'$  называется *многогранным углом*, где  $W = L \cup \Omega$  и  $W' \cup \Omega'$  — соответствующие сферические многоугольники. Если  $I$  — сферический отрезок, являющийся ребром ломаной  $L$ , то конус  $OI$  является пространственным углом и называется *гранью* рассматриваемого многогранного угла. Конус над вершиной ломаной  $L$  называется *ребром*



многогранного угла, а точка  $O$  — *вершиной* многогранного угла. Грани многогранного угла *смежны*, если они пересекаются по лучу. Кроме того, говорят, что сферический многоугольник  $W$  и многогранный угол  $OW$  (а также  $W'$  и  $OW'$ ) *соответствуют* друг другу.

**Замечание 6.17.** Определение многогранного угла можно дать по аналогии с многогранниками. Для этого нужно вместо пространственных многоугольников рассматривать плоские углы (в пространстве) и потребовать существования в точности одной вершины.

**Замечание 6.18.** Если, как и выше,  $r$  обозначает радиус сферы  $S^2$ , то величина пространственного угла  $OI$  равна  $|I|/r$ , где  $|I|$  — длина сферического отрезка  $I$  (как дуги окружности). Величина этого пространственного угла называется соответствующим *плоским углом* многогранного угла. Кроме того, для каждой пары смежных граней определен *двугранный угол* между ними (определение такое же, как дается в школе при изучении трехгранных углов).

**Пример 6.19** (Одноугольник). Сферическая ломаная, имеющая ровно одну вершину, является сферической прямой. Она разбивает сферу на две полусферы. Таким образом, каждый сферический одноугольник — полусфера.

**Пример 6.20** (Двуугольник). Выясним, как могут выглядеть замкнутые сферические ломаные без самопересечений, имеющие ровно две вершины  $P$  и  $Q$ . Если  $P$  и  $Q$  не являются диаметрально противоположными, то они соединяются ровно двумя сферическими отрезками: это те отрезки, на которые  $P$  и  $Q$  делят единственную сферическую прямую, проходящую через  $P$  и  $Q$ . В этом случае двуугольник — полусфера. Если же  $P$  и  $Q$  диаметрально противоположны, то они соединяются бесконечным числом сферических отрезков, любую пару которых можно выбрать в качестве ребер двуугольника. Пусть  $e_1$  и  $e_2$  такие сферические отрезки. Тогда  $Oe_i$  — полуплоскости, проходящие через общую прямую  $\ell \supset \{P, Q\}$ . Эти полуплоскости делят  $\mathbb{R}^3$  на две компоненты. Выбираем одну из этих компонент и дополняем ограничивающими ее полуплоскостями — получаем замкнутую компоненту. Тогда двуугольник — это пересечение сферы и одной из таких замкнутых компонент.

## 6.2 Выпуклые сферические многоугольники

**Определение 6.21.** Сферический многоугольник  $W \subset S^2$  называется *выпуклым*, если конус  $OW$  — выпуклый.

**Предложение 6.22.** *Сферический многоугольник выпуклый, если и только если соответствующий ему многогранный угол равен пересечению полупространств, ограниченных плоскостями, проходящими через его грани.*

*Доказательство.* Пусть  $W \subset S^2$  — выпуклый сферический многоугольник. По определению, это означает выпуклость соответствующего многогранного угла  $OW$ . Дословно повторяя рассуждения из доказательства теоремы 5.21, заключаем, что выпуклость многогранного угла  $OW$  равносильна возможности представить этот угол в виде пересечения полупространств, ограниченных плоскостями, проходящими через его грани.  $\square$

**Следствие 6.23.** *Сферический многоугольник выпуклый, если и только если он равен пересечению полусфер, ограниченных сферическими прямыми, проходящими через его ребра.*

**Следствие 6.24.** *Выпуклый сферический многоугольник  $W$  содержит диаметрально противоположные точки, если и только если  $W$  — или подразбитый одноугольник, или выпуклый подразбитый двуугольник.*

*Доказательство.* Так как  $W$  содержит диаметрально противоположные точки, скажем  $P$  и  $Q$ , то соответствующий ему многогранный угол  $OW$  содержит прямую  $(PQ)$ , проходящую через  $O$ . В силу предложения 6.22, многогранный угол  $OW$  равен пересечению конечного числа содержащих его полупространств  $\Pi_i$ , ограниченных плоскостями  $\pi_i$ , проходящими через его грани. Но тогда все  $\Pi_i$ , а, значит, и все  $\pi_i$ , содержат  $(PQ)$  (если прямая содержится в полупространстве и проходит через точку полупространства, лежащую на ограничивающей это полупространство плоскости, то такая прямая обязана лежать в этой плоскости). Отсюда вытекает, что  $OW$  — двугранный угол. Если его величина равна  $\pi$ , то  $OW \cap S^2$  — полусфера. Если же его величина меньше  $\pi$ , то  $OW \cap S^2$  — выпуклый двуугольник.

Обратно, каждый подразбитый одноугольник или двуугольник содержит диаметрально противоположные точки.  $\square$

**Следствие 6.25.** Пусть  $W$  — выпуклый сферический  $n$ -угольник. Предположим, что  $n \geq 3$  и что все углы  $W$  меньше  $\pi$ . Тогда  $W$  не содержит диаметрально противоположных точек.

*Доказательство.* Действительно, если  $W$  содержит диаметрально противоположные точки, то, по следствию 6.24, он является или подразбитым одноугольником, или подразбитым двуугольником. Однако в каждом из этих случаев  $W$  содержит не более двух углов величины меньшей, чем  $\pi$ . Последнее противоречит условию  $n \geq 3$ .  $\square$

**Определение 6.26.** Пусть  $\ell$  — сферическая прямая, а  $P$  и  $Q \neq P$  — точки на  $\ell$ . Если  $P$  и  $Q$  не являются диаметрально противоположными, то более короткую из дуг окружности  $\ell$  между точками  $P$  и  $Q$  назовем *малым сферическим отрезком*, а большую — *большим сферическим отрезком*. Такие малый и большой сферический отрезки будем называть взаимно *дополнительными*. Для диаметрально противоположных  $P$  и  $Q$  каждую из дуг между  $P$  и  $Q$  будем называть *малым сферическим отрезком*.

**Замечание 6.27.** Если точки  $P$  и  $Q \neq P$  сферы  $S^2$  не являются диаметрально противоположными, то малый сферический отрезок с концами  $P, Q$  определен однозначно. В дальнейшем, *малый сферический отрезок, соединяющий не диаметрально противоположные точки  $P$  и  $Q$* , будем обозначать через  $PQ$ . Кроме того, *длину малого сферического отрезка  $PQ$*  обозначим через  $|PQ|$ .

**Предложение 6.28.** Пусть  $P$  и  $Q$  — произвольные точки сферы  $S^2$ , а  $e$  — некоторый сферический отрезок, соединяющий  $P$  и  $Q$ . Как всегда, через  $[P, Q]$  будем обозначать евклидов отрезок с концами в  $P$  и  $Q$ . Тогда  $Oe = O[P, Q]$ , если и только если точки  $P$  и  $Q$  не являются диаметрально противоположными, а  $e$  — малый сферический отрезок.

*Доказательство.* Пусть  $Oe = O[P, Q]$ . Тогда  $P$  и  $Q$  не могут быть диаметрально противоположными. Действительно, если  $P$  и  $Q$  — диаметрально противоположны, то  $O[P, Q] \cap S^2 = \{P, Q\} \neq e = Oe \cap S^2$ .

Далее,  $e$  не может быть большим сферическим отрезком, так как  $e = O[P, Q] \cap S^2$ , а  $O[P, Q]$  является углом равнобедренного треугольника  $OPQ$  и, значит, этот угол меньше  $\pi$ .

Обратно, если  $P$  и  $Q$  не являются диаметрально противоположными, то  $O$  не лежит на прямой, проходящей через  $P$  и  $Q$ , поэтому  $O[P, Q]$  — угол величины, меньшей  $\pi$ , так что  $O[P, Q] \cap S^2$  — малый сферический отрезок.  $\square$

**Следствие 6.29.** Пусть  $W \subset S^2$  — выпуклый многоугольник, а  $P$  и  $Q \neq P$  — некоторые точки из  $W$ , не являющиеся диаметрально противоположными. Тогда  $PQ \subset W$ .

*Доказательство.* Действительно, выпуклость  $W$  влечет выпуклость  $OW$ , поэтому  $[P, Q] \subset OW$ . Так как  $P$  и  $Q$  не являются диаметрально противоположными, то, по предложению 6.28, имеем  $PQ = OPQ \cap S^2 = O[P, Q] \cap S^2 \subset OW \cap S^2 = W$ .  $\square$

**Предложение 6.30.** Пусть  $W$  — выпуклый сферический  $n$ -угольник, у которого  $n \geq 3$  и все углы которого меньше  $\pi$ . Пусть  $\ell$  — сферическая прямая, проходящая через его вершины  $A_i$  и  $A_j \neq A_i$  (эти точки не являются диаметрально противоположными в силу следствия 6.25, поэтому  $\ell$  однозначно определена и, кроме того, определен малый сферический отрезок  $A_i A_j$ ). Тогда  $\ell \cap W = A_i A_j$ .

*Доказательство.* По следствию 6.29,  $A_i A_j \subset W$ , поэтому  $A_i A_j \subset \ell \cap W$ .

Предположим теперь, что  $\ell \cap W$  содержит некоторую точку  $P$ , не лежащую на  $A_i A_j$ . Тогда, для некоторой внутренней точки  $Q$  из  $A_i A_j$ , точки  $P$  и  $Q$  не являются диаметрально противоположными, поэтому малый сферический отрезок  $PQ \subset \ell$  содержится в  $W$ . Таким образом, одна из точек  $A_i$  или  $A_j$  является внутренней точкой  $PQ$ . Однако это противоречит тому, что угол многоугольника  $W$  в каждой его вершине меньше  $\pi$ .  $\square$

**Предложение 6.31.** Пусть  $A_1, \dots, A_n$  — точки на сфере  $S^2$ . Предположим, что для некоторой сферической прямой  $\ell$  все точки  $A_i$  лежат в одной из замкнутых полусфер, ограниченных  $\ell$ , причем все  $A_i$ , попавшие на  $\ell$ , расположены на дуге  $\sigma \subset \ell$ , величина которой меньше, чем половина длины  $\ell$ . Тогда существует открытая полусфера, содержащая все  $A_i$ .

*Доказательство.* Без ограничения общности, будем считать, что на  $\sigma$  попали точки  $A_1, \dots, A_k$ , а остальные точки  $A_i$ ,  $i > k$ , на  $\sigma$  не попали. Обозначим через  $\Sigma^2$  ту ограниченную  $\ell$  замкнутую полусферу, в которой лежат все  $A_i$ .

Пусть, как всегда,  $O$  — центр сферы  $S^2$ , тогда конус  $O\Sigma^2$  — это полупространство, содержащее  $\Sigma^2$ , а конус  $O\ell$  — плоскость, ограничивающая полупространство  $O\Sigma^2$ .

Пусть  $N$  — ненулевой вектор, перпендикулярный к  $O\ell$  и направленный в полупространство, дополнительное к  $O\Sigma^2$ . Тогда при всех  $i \leq k$  имеем  $\langle N, OA_i \rangle = 0$ , а при всех  $i \geq k + 1$  выполняется  $\langle N, OA_i \rangle < 0$ .

Обозначим через  $M$  середину дуги  $\sigma$ , и пусть  $\xi = N + \varepsilon MO$ , где  $\varepsilon$  — произвольное положительное число. Тогда при всех  $i \leq k$  имеем

$$\langle \xi, OA_i \rangle = \varepsilon \langle MO, OA_i \rangle < 0,$$

так как угол между  $OM$  и  $OA_i$  меньше  $90^\circ$ , поэтому угол между векторами  $MO$  и  $OA_i$  больше  $90^\circ$ .

Далее, выберем  $\varepsilon > 0$  таким, чтобы при каждом  $i \geq k + 1$ , для которого  $\langle MO, OA_i \rangle \neq 0$ , выполнялось  $\varepsilon < -\langle N, OA_i \rangle / |\langle MO, OA_i \rangle|$ . Тогда при каждом  $i \geq k + 1$  имеем

$$\langle \xi, OA_i \rangle = \langle N, OA_i \rangle + \varepsilon \langle MO, OA_i \rangle < 0.$$

Пусть  $\pi$  — плоскость, проходящая через  $O$  и перпендикулярная  $\xi$ . Обозначим через  $H$  то полупространство относительно  $\pi$ , в которое направлен вектор  $\xi$ , а через  $H'$  — открытое полупространство  $H \setminus \pi$ . В силу выбора вектора  $\xi$ , имеем  $A_i \in H'$  при всех  $i = 1, \dots, n$ . Таким образом, в качестве искомой открытой полусферы можно взять  $H' \cap S^2$ .  $\square$

**Следствие 6.32.** Пусть  $W$  — выпуклый сферический  $n$ -угольник. Предположим, что  $n \geq 3$  и что все углы  $W$  меньше  $\pi$ . Тогда существует открытая полусфера, содержащая  $W$ .

*Доказательство.* Пусть  $W = A_1 \cdots A_n$ . Обозначим через  $\ell$  сферическую прямую, проходящую через  $A_1 A_2$ , и положим  $\sigma = A_1 A_2$ . По предложению 6.30,  $\ell \cap W = A_1 A_2$ , поэтому  $\sigma$  удовлетворяет условию предложения 6.31. Кроме того, по следствию 6.23,  $W$  содержится в одной из замкнутых полусфер, ограниченных  $\ell$ . Таким образом, применимо предложение 6.31, в соответствии с которым существует открытая полусфера  $S'$ , содержащая все точки  $A_i$ .

Покажем, что  $W \subset S'$ . Заметим сначала, что, в силу выпуклости  $S'$ , каждый малый сферический отрезок  $A_i A_j$  лежит в  $S'$ . Таким образом,  $\partial W \subset S'$ . Далее, предположим, что некоторая точка  $P \in \text{Int } W$  содержится в  $S^2 \setminus S'$ . Так как  $S^2 \setminus S'$  — замкнутая полусфера, каждая ее точка соединяется с  $P$  некоторым сферическим отрезком, лежащим в  $S^2 \setminus S'$ . Так как  $\partial W \subset S'$ , такие сферические отрезки не пересекают  $\partial W$ , поэтому  $S^2 \setminus S' \subset \text{Int } W$ . Но тогда  $W$  содержит диаметрально противоположные точки, что противоречит следствию 6.25.  $\square$

**Конструкция 6.33.** Пусть  $W$  — сферический многоугольник, целиком лежащий в открытой полусфере  $S' \subset S^2$ . Пусть  $H'$  — открытое

полупространство, для которого  $S' = S^2 \cap H'$ , и  $\pi'$  — плоскость, ограничивающая  $H'$ . Пусть  $N$  — ненулевой вектор, перпендикулярный  $\pi'$ , и направленный в  $H'$ , а  $\pi''$  — плоскость, параллельная  $\pi'$  и проходящая через  $O + N$ . Обозначим через  $\nu$  радиальную проекцию из  $O$  на  $\pi''$ , ограниченную на  $S' = H' \cap S^2$ , и заметим, что  $\nu$  — гомеоморфизм. По построению,  $\nu(\partial W)$  — евклидова ломаная, ограничивающая некоторый плоский многоугольник. Так как  $\nu(\text{Int } W)$  — ограниченная компонента для  $\pi'' \setminus \nu(\partial W)$ , множество  $\nu(\text{Int } W)$  — внутренность этого многоугольника. Таким образом,  $\nu(\partial W)$  ограничивает многоугольник  $\nu(W)$ .

### 6.3 Эйлеровы многоугольники

**Определение 6.34.** Выпуклый сферический  $n$ -угольник при  $n \geq 3$  назовем *эйлеровым*, если никакие три его вершины не лежат на одной сферической прямой.

**Замечание 6.35.** Все углы эйлерова многоугольника меньше  $\pi$ , иначе вершина угла величины  $\pi$  и две смежные с ней вершины лежат на одной сферической прямой.

**Предложение 6.36.** *Сферический  $n$ -угольник,  $n \geq 3$ , является эйлеровым, если и только если он — выпуклый и все его углы меньше  $\pi$ .*

*Доказательство.* Действительно, эйлеров многоугольник является выпуклым по определению, и все его углы меньше  $\pi$  по замечанию 6.35. Обратное вытекает из предложения 6.30, которое гарантирует, что каждая сферическая прямая, проходящая через пару вершин рассматриваемого сферического многоугольника, не содержит ни одной из оставшихся вершин.  $\square$

Таким образом, доказанные выше утверждения для выпуклых  $n$ -угольников, у которых  $n \geq 3$  и все углы меньше  $\pi$ , являются свойствами эйлеровых многоугольников. Соберем вместе полученные результаты.

**Следствие 6.37.** *Пусть  $W$  — эйлеров многоугольник. Тогда*

- (1)  $W$  не содержит диаметрально противоположных точек;
- (2) для любых  $A$  и  $B \neq A$  из  $W$  имеем  $AB \subset W$ ;

- (3) если  $\ell$  — сферическая прямая, проходящая вершины  $A_i$  и  $A_j \neq A_i$  многоугольника  $W$ , то  $\ell \cap W = A_i A_j$ ;
- (4)  $W$  содержится в некоторой открытой полусфере.

**Следствие 6.38.** Пусть  $W$  — эйлеров многоугольник, и пусть  $A$  и  $B$  — различные точки из  $W$ . Тогда если  $A$  и  $B$  не лежат на одном ребре  $W$ , то каждая внутренняя точка из  $AB$  лежит в  $\text{Int } W$ .

*Доказательство.* Предположим противное, т.е. некоторая внутренняя точка  $P$  из  $AB$  попала на  $\partial W$ . Тогда  $P$  лежит на некотором ребре  $e$  многоугольника  $W$  и, значит,  $P \in Oe$ . По предложению 6.22,  $OW$  содержится в полупространстве, ограниченном плоскостью  $\pi_e$ , проходящей через грань  $Oe$ , поэтому  $[A, B] \subset \pi_e$  и, значит,  $AB \subset \partial W$ . Если  $A$  или  $B$  не лежит на  $e$ , то один из концов ребра  $e$ , скажем, точка  $A_i$ , попадает внутрь  $AB$  и, значит, из  $A_i$  выходят ребра многоугольника  $W$  под углом равным  $\pi$ , что входит в противоречие с замечанием 6.35.  $\square$

**Определение 6.39.** Пусть  $W$  — эйлеров многоугольник. Для каждой пары  $A$  и  $B$  несмежных вершин  $W$  малый сферический отрезок  $AB$  называется *диагональю*  $W$ .

**Следствие 6.40.** Каждая диагональ делит эйлеров многоугольник на два эйлеровых многоугольника, один из которых лежит в одной полусфере относительно сферической прямой, проходящей через эту диагональ, а другой — в противоположной полусфере.

*Доказательство.* По следствию 6.37, рассматриваемый эйлеров многоугольник  $W$  содержится в некоторой открытой полусфере  $S'$ . Теперь, в обозначениях конструкции 6.33, спроецируем многоугольник  $W$  на плоскость  $\pi''$  в выпуклый многоугольник  $\nu(W)$ . Так как у  $W$  все углы меньше  $\pi$ , то же самое имеет место и для  $\nu(W)$ . Теперь утверждение следствия вытекает из соответствующего факта школьной геометрии: диагональ выпуклого плоского многоугольника делит его на два выпуклых многоугольника.  $\square$

**Замечание 6.41.** Отметим, что следствие 6.40 нельзя обобщить на все выпуклые многоугольники. В качестве примера рассмотрим произвольный подразбитый одноугольник, в котором нет диаметрально противоположных вершин. Тогда каждая его диагональ лежит на его границе и, значит, не делит многоугольник.

**Следствие 6.42.** Пусть  $W$  — эйлеров многоугольник, а  $W'$  — дополнительный к нему сферический многоугольник. Тогда  $W'$  эйлеровым не является.

*Доказательство.* По следствию 6.37,  $W$  содержится в открытой полусфере, поэтому  $W'$  содержит дополнение к этой открытой полусфере, т.е. содержит замкнутую полусферу и, значит, диаметрально противоположные точки. Противоречие с тем же следствием 6.37.  $\square$

**Замечание 6.43.** Из следствия 6.37 вытекает, что все ребра эйлера многоугольника — малые сферические отрезки, отличные от сферической полупрямой. Тем самым каждая пара последовательных вершин эйлера многоугольника однозначно определяет ребро этого многоугольника, соединяющее эти вершины. Следствие 6.42 влечет, что граница эйлера многоугольника однозначно определяет тот из двух многоугольников, который и является эйлеровыми. Итак, последовательность вершин эйлера многоугольника однозначно его определяет, поэтому в дальнейшем мы будем обозначать эйлеров многоугольник с последовательными вершинами  $A_1, \dots, A_n$  просто как  $A_1 \cdots A_n$ .

**Замечание 6.44.** Замечание 6.43 можно обобщить и на сферические многоугольники, не содержащие диаметрально противоположных точек и такие, что их границы целиком лежат в некоторых открытых полусферах. Действительно, последовательные вершины таких многоугольников соединяются однозначно определенными малыми сферическими отрезками, а дополнительный многоугольник содержит замкнутую полусферу и, поэтому, диаметрально противоположные точки. Такие многоугольники с последовательными вершинами  $A_1, \dots, A_n$  мы также будем обозначать через  $A_1 \cdots A_n$ .

**Следствие 6.45.** Пусть  $W_1$  и  $W_2$  — эйлеровы многоугольники. Предположим, что

- (1) многоугольники  $W_1$  и  $W_2$  пересекаются по их общему ребру  $e$ ;
- (2) в каждой концевой точке ребра  $e$  суммарный угол этих многоугольников не превосходит  $\pi$ ;
- (3) объединение  $W_1 \cup W_2$  содержится в открытой полусфере.

Тогда  $W_1 \cup W_2$  — эйлеров многоугольник, если в качестве его вершин рассматривать вершины  $W_1$  и  $W_2$ , не содержащиеся в  $e$ , а также те концевые точки ребра  $e$ , в которых суммарный угол многоугольников  $W_1$  и  $W_2$  меньше  $\pi$ .

*Доказательство.* Пусть  $S'$  — открытая полусфера, содержащая  $W_1 \cup W_2$ . Воспользуемся конструкцией 6.33 и спроецируем  $S'$  радиальной



проекцией  $\nu$  на плоскость  $\pi''$ . Тогда  $\nu(W_1)$  и  $\nu(W_2)$  — плоские выпуклые многоугольники, для которых выполняются аналогичные условия. Непосредственно проверяется, что  $\nu(W_1) \cup \nu(W_2)$  — выпуклый многоугольник. Если угол в образе концевой вершины ребра  $e$  равен  $\pi$ , то выкинем этот образ из множества вершин многоугольника  $\nu(W_1) \cup \nu(W_2)$ . В результате получим выпуклый многоугольник  $W''$ , все углы которого меньше  $\pi$ . Но тогда  $\nu^{-1}(W'')$  — эйлеров многоугольник, совпадающий как множество с  $W_1 \cup W_2$ .  $\square$

## 6.4 Сферические треугольники

Выясним, какие тройки точек сферы являются вершинами эйлеровых треугольников, и сколько эйлеровых треугольников может иметь один и тот же набор вершин.

**Предложение 6.46.** *Три точки сферы  $S^2$  являются вершинами эйлерова треугольника тогда и только тогда, когда они не лежат на одной сферической прямой. Более того, для любой такой тройки точек эйлеров треугольник определен однозначно.*

*Доказательство.* Если  $W$  — эйлеров треугольник, то его вершины не лежат на одной сферической прямой по определению.

Обратно, рассмотрим три произвольные точки  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  на сфере  $S^2$ , не лежащие на одной сферической прямой. Проведем через  $A_1$  и  $A_2$  сферическую прямую  $\ell$ , тогда  $A_3$  не лежит на  $\ell$ , и  $A_1A_2 \subset \ell$  имеет длину меньше половины длины  $\ell$ . Поэтому, в силу предложения 6.31, точки  $A_i$  лежат в некоторой открытой полусфере  $S'$ . Применим конструкцию 6.33 и спроецируем полусферу  $S'$  на плоскость  $\pi''$  радиальной проекцией  $\nu$  из центра  $O$  сферы  $S^2$ . Точки  $\nu(A_i)$  не лежат на одной прямой, так как вершины  $A_i$  не лежат на одной сферической прямой. Поэтому точки  $\nu(A_i)$  являются вершинами некоторого невырожденного треугольника  $T'' \subset \pi''$ . Но тогда  $OT''$  — выпуклый трехгранный угол, поэтому  $\nu^{-1}(T'')$  — выпуклый сферический треугольник с вершинами  $A_i$ . Так как его вершины не лежат на одной сферической прямой, он — эйлеров.

Однозначная определенность эйлерова треугольника следует из замечания 6.43.  $\square$

**Следствие 6.47.** *Пусть  $T$  — эйлеров треугольник, а  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$  — точки из  $T$ , не лежащие на одной сферической прямой. Тогда единственный эйлеров треугольник  $B_1B_2B_3$  содержится в  $T$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим ту же проекцию  $\nu$  для треугольника  $T$ . Тогда точки  $\nu(B_i)$  лежат в треугольнике  $T'' = \nu(T)$ . Поэтому эти точки являются вершинами невырожденного треугольника  $T_1''$ , поэтому единственный эйлеров треугольник с вершинами  $B_i$  — это  $\nu^{-1}(T_1'') \subset \nu^{-1}(T'') = T$ .  $\square$

## 6.5 Расстояние на сфере

Расстояние между двумя точками на плоскости — это длина отрезка прямой, соединяющего эти две точки. Естественно поэтому определить расстояние между точками на сфере как длину соответствующего отрезка сферической прямой. Однако, на сфере такой отрезок не один.

**Определение 6.48.** *Расстоянием между двумя точками на сфере называется длина кратчайшего сферического отрезка, соединяющего эти две точки.*

**Замечание 6.49.** Возможны два разных случая.

- (1) Рассматриваемые точки не являются диаметрально противоположными. Тогда они соединяются ровно двумя сферическими отрезками, причем длины этих отрезков различны. Расстояние в этом случае — это длина более короткого сферического отрезка.
- (2) Рассматриваемые точки диаметрально противоположны. Тогда их соединяет бесконечно много сферических отрезков, и все они имеют одинаковую длину  $\pi r$  — это и есть расстояние между рассматриваемыми точками.

Выпишем явную формулу для расстояния между двумя точками на сфере. Пусть  $\xi, \eta$  — радиус-векторы этих точек; расстояние — это длина дуги окружности радиуса  $r$ , заключенной между этими векторами. Таким образом, расстояние  $\rho$  находится по формуле  $\rho = r \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между векторами  $\xi$  и  $\eta$ . Вспоминая, что  $\langle \xi, \eta \rangle = |\xi| \cdot |\eta| \cos \alpha$  и  $|\xi| = |\eta| = r$ , получим для расстояния формулу  $r^2 \cos(\rho/r) = \langle \xi, \eta \rangle$ .

## 6.6 Окружности на сфере

Дадим метрическое определение сферической окружности по аналогии с тем, как это делается на евклидовой плоскости.

**Определение 6.50.** *Окружностью с центром в точке  $P$  радиуса  $a$  на сфере называется множество точек сферы, находящихся от  $P$  на расстоянии  $a$ .*

Очевидно, окружностями на сфере являются обычные евклидовы окружности, т.е. пересечения сферы с плоскостями. Центр такой окружности лежит на пересечении сферы с прямой, проходящей через центр сферы перпендикулярно плоскости окружности (см. рис. 6.1). Отметим, что у каждой окружности на сфере имеется два центра и два радиуса. Кроме того, большая окружность на сфере — это одновременно и окружность и прямая; у таких окружностей оба радиуса совпадают и равны  $\pi r/2$ .

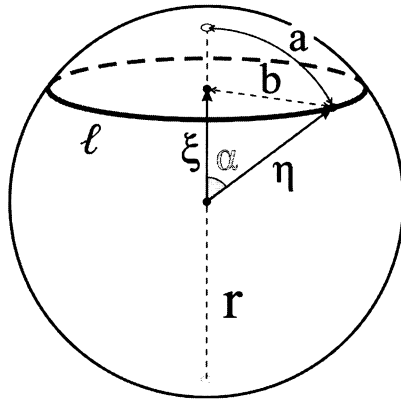


Рис. 6.1: Окружности на сфере

Получим общую формулу, выражающую длину окружности через ее радиус (напомним, что на плоскости отношение длины окружности к радиусу равно  $2\pi$ ). Пусть  $\xi$  — радиус-вектор евклидова центра окружности,  $\eta$  — радиус-вектор произвольной точки, лежащей на окружности, а  $b$  — евклидов радиус окружности, см. рис. 6.1. Тогда длина окружности равна  $2\pi b$ , причем  $b = r \sin \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между векторами  $\xi$  и  $\eta$ . Кроме того, сферический радиус  $a$  окружности равен  $r \alpha$ . Исключая из этих равенств  $\alpha$  и  $b$ , получим формулу, связывающую длину  $\ell(a)$  сферической окружности с ее радиусом:  $\ell(a) = 2\pi r \sin(a/r)$ .

Заметим, что, если  $a/r$  очень мало, то  $\sin(a/r)$  близко к  $a/r$  и в пределе получаем евклидову формулу, так как

$$\lim_{(a/r) \rightarrow 0} \frac{\ell(a)}{a} = 2\pi.$$

## 6.7 Теоремы о сферических треугольниках

Всюду ниже в этом параграфе  $A, B, C$  обозначают вершины некоторого эйлерава треугольника,  $\alpha, \beta, \gamma$  — величины его углов при этих вершинах,  $a, b, c$  — длины его противоположных сторон, см. рис. 6.2.

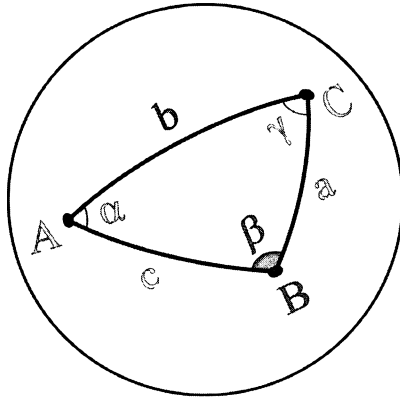


Рис. 6.2: Сферический треугольник

В сферической геометрии действуют другие формулы “решения треугольников”, чем в евклидовой; сейчас мы получим эти формулы.

Выразим длину стороны  $a$  через длины сторон  $b, c$  и угол  $\alpha$  между этими сторонами.

**Предложение 6.51** (Теорема косинусов). *Имеет место формула*

$$\cos \frac{a}{r} = \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r} + \sin \frac{b}{r} \sin \frac{c}{r} \cos \alpha.$$

*Доказательство.* Пусть  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  — радиус-векторы вершин  $A, B, C$  треугольника соответственно. Тогда, в силу эйлеровости треугольника  $ABC$ , векторы  $\xi_i$  линейно независимы.

Пусть  $\eta$ ,  $\zeta$  — какие-нибудь касательные векторы к сторонам  $b$ ,  $c$  треугольника в точке  $A$ , тогда

$$\cos \alpha = \frac{\langle \eta, \zeta \rangle}{|\eta| \cdot |\zeta|}$$

вне зависимости от длин этих векторов (мы воспользуемся этим ниже и выберем эти векторы удобными для вычислений).

Вектор  $\eta$  касается большого круга, проходящего через центр сферы (совпадающий, как мы условились, с началом координат) и точки  $A$ ,  $C$ , поэтому можно положить  $\eta = \xi_3 - \lambda \xi_1$ , где  $\lambda$  — некоторое число (выбранный вектор  $\eta$  отличен от нуля в силу линейной независимости  $\xi_1$  и  $\xi_3$ ). Чтобы найти  $\lambda$ , умножим предыдущее равенство скалярно на  $\xi_1$ ; получим

$$\langle \xi_1, \eta \rangle = \langle \xi_1, \xi_3 \rangle - \lambda \langle \xi_1, \xi_1 \rangle.$$

Левая часть равенства равна нулю, так как вектор  $\xi_1$  — радиус сферы, проведенный в точку  $A$ , а  $\eta$  касается сферы в этой точке. Так как угол между  $\xi_1$  и  $\xi_3$  равен  $b/r$ , имеем  $\langle \xi_1, \xi_3 \rangle = r^2 \cos(b/r)$ ; наконец  $\langle \xi_1, \xi_1 \rangle = r^2$ . Отсюда находим  $\lambda$  и  $\eta$ :

$$\lambda = \cos \frac{b}{r}, \quad \eta = \xi_3 - \xi_1 \cos \frac{b}{r}.$$

Аналогично получаем

$$\zeta = \xi_2 - \xi_1 \cos \frac{c}{r},$$

Вычислим скалярные произведения этих векторов и подставим в формулу для косинуса  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \langle \eta, \zeta \rangle &= r^2 \left( \cos \frac{a}{r} - \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r} \right), \\ \langle \eta, \eta \rangle &= r^2 \left( 1 - \cos^2 \frac{b}{r} \right) = r^2 \sin^2 \frac{b}{r}, \quad \langle \zeta, \zeta \rangle = r^2 \left( 1 - \cos^2 \frac{c}{r} \right) = r^2 \sin^2 \frac{c}{r}, \end{aligned}$$

откуда

$$\cos \alpha = \frac{\cos(a/r) - \cos(b/r) \cos(c/r)}{\sin(b/r) \sin(c/r)},$$

что немедленно влечет требуемое равенство.  $\square$

**Следствие 6.52** (Сферическая теорема Пифагора). Пусть треугольник  $ABC$  прямоугольный, т.е.  $\alpha = \pi/2$ . Тогда

$$\cos \frac{a}{r} = \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r}.$$

*Доказательство.* Каждый прямоугольный треугольник является эйлеровым, поэтому достаточно применить предложение 6.51.  $\square$

**Следствие 6.53** (Строгое неравенство треугольника для длин сторон эйлерова треугольника). *Имеет место неравенство  $c < a + b$ .*

*Доказательство.* Так как при сжатии/растяжении пространства длины сторон треугольника умножаются на одно и то же число и, значит, неравенство треугольника сохраняется, можно считать, что радиус сферы равен 1. Так как треугольник — эйлеров, длины его сторон и величины его углов лежат на интервале  $(0, \pi)$ . Из предложения 6.51, положительности  $\sin b$  и  $\sin c$ , а также неравенства  $\cos \alpha < 1$ , вытекает, что

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha < \cos b \cos c + \sin b \sin c = \cos(c - b).$$

Пусть  $c \geq b$ , тогда  $0 \leq c - b < \pi$ , так что из строгой монотонности косинуса на  $[0, \pi)$  вытекает справедливость неравенства  $a > c - b$ , поэтому  $c < a + b$ . Если же  $c < b$ , то и подавно  $c < a + b$ .  $\square$

**Задача 6.54.** Докажите, что при  $r \rightarrow \infty$  и фиксированных длинах сторон сферическая теорема косинусов переходит в евклидову, а именно

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha_0 + O\left(\frac{1}{r}\right),$$

где  $\alpha_0 = \lim_{r \rightarrow \infty} \alpha$ .

**Предложение 6.55** (Сферическая теорема синусов). *Имеет место равенство*

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(a/r)} = \frac{\sin \beta}{\sin(b/r)} = \frac{\sin \gamma}{\sin(c/r)}.$$

*Доказательство.* Рассмотрим выражение  $\sin \alpha / \sin(a/r)$ , выразим  $\sin \alpha$  из теоремы косинусов, а синусы выразим через косинусы. Получим

$$\frac{\sin \alpha}{\sin\left(\frac{a}{r}\right)} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{a}{r}\right) - \cos^2\left(\frac{b}{r}\right) - \cos^2\left(\frac{c}{r}\right) + 2 \cos\left(\frac{a}{r}\right) \cos\left(\frac{b}{r}\right) \cos\left(\frac{c}{r}\right)}}{\sin\left(\frac{a}{r}\right) \sin\left(\frac{b}{r}\right) \sin\left(\frac{c}{r}\right)}.$$

Это выражение симметрично по  $a, b, c$ .  $\square$

**Замечание 6.56.** При  $r \rightarrow \infty$  равенство из предложения 6.55 переходит в евклидову теорему синусов.

Приведенные выше формулы были естественными аналогами соответствующих формул евклидовой геометрии (хотя и отличались от них “количественно”). Однако в сферической геометрии существуют утверждения, не имеющие аналогов в евклидовом случае. Одно из важнейших — выражение для стороны треугольника через его углы.

**Предложение 6.57** (Двойственная сферическая теорема косинусов).  
Имеет место равенство

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \frac{a}{r}.$$

*Доказательство.* Это предложение можно получить из теоремы косинусов чисто алгебраическими выкладками. Однако мы приведем другое доказательство, использующее еще одно специфическое для сферы понятие полярных треугольников.

Рассмотрим треугольник  $ABC$  и построим по нему другой треугольник  $A'B'C'$  следующим образом. Проведем через вершины  $B, C$  и центр сферы плоскость  $\mu$  и через  $A'$  обозначим ту точку пересечения сферы с прямой, проходящей через центр сферы перпендикулярно  $\mu$ , которая лежит в той же полусфере, отсекаемой этой плоскостью, что и  $A$ . Аналогично построим вершины  $B', C'$ . Если через  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  обозначить радиус-векторы вершин  $A, B, C$ , а через  $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3$  — радиус-векторы вершин  $A', B', C'$ , то полярный треугольник определяется равенствами

$$\langle \xi_i, \xi'_j \rangle = 0, \quad i \neq j, \quad \langle \xi_i, \xi'_i \rangle > 0$$

Отсюда немедленно следует, что соотношение полярности взаимно (т.е. треугольник  $ABC$  полярен к  $A'B'C'$ ). Обозначим через  $a', b', c'$  длины сторон треугольника  $A'B'C'$ , противоположных одноименным вершинам, и покажем, что углы треугольника  $ABC$  и стороны треугольника  $A'B'C'$  связаны равенствами

$$\alpha + \frac{a'}{r} = \beta + \frac{b'}{r} = \gamma + \frac{c'}{r} = \pi.$$

Действительно, так как угол между векторами  $\xi'_2$  и  $\xi'_3$  равен  $a'/r$ , а  $\alpha$  — это угол между ортогональными этим векторам плоскостями  $(O, \xi_1, \xi_3)$  и  $(O, \xi_1, \xi_2)$ , то углы  $a'/r$  и  $\alpha$  либо совпадают, либо дополняют друг друга до  $\pi$ . В действительности верно второе; чтобы в этом убедиться, достаточно посмотреть на всю конструкцию из точки, лежащей на луче  $OA$  (см. рис. 6.3).

Из приведенного равенства и теоремы косинусов, записанной для полярного треугольника  $A'B'C'$ , немедленно следует двойственная теорема косинусов.  $\square$

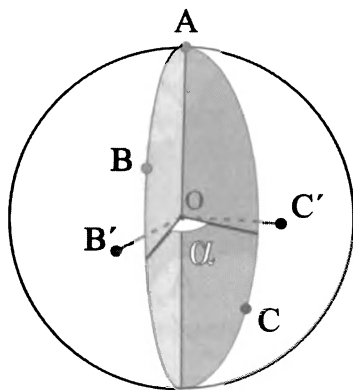


Рис. 6.3: Соотношения в полярных треугольниках

**Замечание 6.58** (Признаки равенства треугольников). Назовем два сферических треугольника *равными*, если у них равны углы и стороны. Подобно евклидовой теории, из теоремы косинусов следуют признаки равенства треугольников “по трем сторонам”, по “двум сторонам и углу между ними” и “по стороне и двум прилежащим к ней углам” (докажите!). Однако, в отличие от евклидовой, в сферической геометрии есть еще один признак — “признак равенства треугольников по трем углам” (он сразу же вытекает из двойственной теоремы косинусов или из соотношения между сторонами и углами полярных треугольников). Таким образом, углы сферического треугольника полностью его определяют.

**Задача 6.59.** Выясните, в какую формулу евклидовой геометрии переходит двойственная теорема косинусов в пределе при  $r \rightarrow \infty$ .

На сфере не верна евклидова теорема о сумме углов треугольника: например, треугольник, с вершинами в точках  $(0, 0, r)$ ,  $(0, r, 0)$ ,  $(r, 0, 0)$  имеет три прямых угла! Оказывается, сумма углов треугольника на сфере всегда больше  $\pi$ ; более того, разность этих двух чисел пропорциональна площади треугольника.

**Предложение 6.60** (Сумма углов сферического треугольника). Обозначим через  $S$  площадь треугольника  $ABC$ . Тогда

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{S}{r^2}.$$



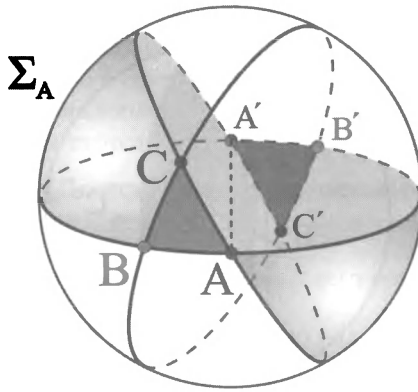


Рис. 6.4: Сумма углов сферического треугольника

*Доказательство.* Продолжим стороны  $AB$  и  $AC$  нашего треугольника до больших кругов. Эти круги разбивают сферу на четыре части, причем только одна из этих частей содержит треугольник  $ABC$ . Рассмотрим эту последнюю часть, объединенную с ее центрально симметричной копией (относительно центра сферы), и обозначим через  $\Sigma_A$  площадь полученной фигуры (см.рис. 6.4). Ясно, что  $\Sigma_A$  пропорциональна углу  $\alpha$ ; кроме того, если  $\alpha = \pi$ , то  $\Sigma_A$  — это площадь сферы, т.е.  $4\pi r^2$ . Отсюда получаем, что  $\Sigma_A = 4r^2\alpha$ . Аналогично определяем и находим  $\Sigma_B = 4r^2\beta$  и  $\Sigma_C = 4r^2\gamma$ . Заметим теперь, что вместе эти три фигуры покрывают всю сферу, но при этом трижды (вместо одного раза) считается площадь треугольника  $ABC$  и центрально симметричного равного ему треугольника  $A'B'C'$ . Таким образом,

$$4r^2(\alpha + \beta + \gamma) = 4\pi r^2 + 4S,$$

откуда, после деления на  $4r^2$ , следует требуемое равенство.  $\square$

**Замечание 6.61.** При доказательстве (и даже формулировке) последнего утверждения мы обошли вопрос о том, что такое площадь сферической области. Этот вопрос (для произвольной поверхности) детально обсуждается в курсе анализа; мы фактически использовали только три свойства площади: аддитивность (площадь объединения фигур, пересекающихся лишь по кривым, равна сумме их площадей), инвариантность (площади частей сферы, отличающиеся на движение, например на поворот, равны) и нормировку (площадь всей сферы равна  $4\pi r^2$ ).

Легко понять, что последняя теорема останется справедливой, если в качестве  $S$  взять любую положительную функцию от сферической фигуры, обладающую этими тремя свойствами (она может быть определена не для всех фигур, но, по крайней мере, должна быть определена для треугольников и их конечных объединений) — в действительности, конечно, такая функция ровно одна.

## Литература к главе 6

- [1] Степанов Н.Н. *Сферическая тригонометрия*. М.-Л.: ОГИЗ, 1948.  
 [2] Вентцель М.К. *Сферическая тригонометрия*. 2 изд, ИГКЛ, 1948.

## Упражнения к главе 6

**Упражнение 6.1.** Опишите все тройки точек сферы, являющиеся вершинами некоторых сферических треугольников. Сколько различных сферических треугольников могут иметь одни и те же вершины?

**Упражнение 6.2.** Пусть  $W$  — эйлеров сферический треугольник. Тогда в треугольнике  $W$

- (1) против равных сторон лежат равные углы;
- (2) против равных углов лежат равные стороны;
- (3) против большего угла лежит большая сторона;
- (4) против большей стороны лежит больший угол.

**Упражнение 6.3** (Мнемоническое правило Непера). Пусть  $W$  — сферический прямоугольный треугольник с катетами  $a$  и  $b$ , гипотенузой  $c$  и углами  $\alpha$  и  $\beta$ , лежащими напротив катетов  $a$  и  $b$  соответственно. Положим  $\bar{a} = \pi/2 - a$ ,  $\bar{b} = \pi/2 - b$ . Под *элементами*  $W$  будем понимать его углы  $\alpha$  и  $\beta$ , а также его стороны, однако вместо катетов  $a$  и  $b$  будем рассматривать их “дополнения”  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  до  $\pi/2$ . Расположим вдоль окружности элементы  $W$  в том порядке, в котором они встречаются при обходе самого  $W$ , а именно, в порядке  $\alpha, c, \beta, \bar{a}, \bar{b}$ . Докажите, что

- (1) для трех смежных элементов  $W$  косинус среднего элемента равен произведению котангенсов соседних;
- (2) для трех несмежных элементов косинус элемента, расположенного отдельно от других двух, равен произведению их синусов.

**Упражнение 6.4.** Докажите, что плоский многоугольник выпуклый, если и только если все его углы не превосходят  $\pi$ .

**Упражнение 6.5.** Пусть  $W_1$  и  $W_2$  — плоские выпуклые многоугольники. Предположим, что

- (1) многоугольники  $W_1$  и  $W_2$  пересекаются по их общему ребру  $e$ ;
- (2) в каждой концевой точке ребра  $e$  суммарный угол этих многоугольников не превосходит  $\pi$ .

Тогда  $W_1 \cup W_2$  — выпуклый многоугольник.

**Упражнение 6.6.** Вокруг всякого ли треугольника на сфере можно описать окружность?

**Упражнение 6.7.** Во всякий ли треугольник на сфере можно вписать окружность?

**Упражнение 6.8.** Даны стороны сферического треугольника. Найти радиус описанной окружности.

**Упражнение 6.9.** Даны стороны сферического треугольника. Найти его высоты.

**Упражнение 6.10.** Доказать, что для выпуклого сферического  $n$ -угольника имеет место равенство

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \pi(n - 2) + \frac{S}{r^2},$$

где  $\alpha_j$  — его углы, а  $S$  — его площадь.

## Глава 7

# Жесткие и изгибаемые многогранники

**План.** Тригонометрическая лемма Коши, изоморфизм графов многогранников, согласованный со структурой граней, одинаково устроенные границы многогранников, отождествление границ многогранников, совмещение многоугольников, теорема Коши о жесткости выпуклых многогранников, комбинаторная лемма Коши, изгибаемые многогранники, октаэдр Брикара, многогранник Штеффена, гипотеза кузнечных мехов, теорема Сабитова о сохранении объема многогранника при изгибании.

Техника, разработанная в предыдущем разделе, позволит нам доказать нетривиальный результат, который будет существенно использован в дальнейшем при доказательстве знаменитой теоремы Коши о жесткости многогранников.

### 7.1 Тригонометрическая лемма Коши

Рассмотрим на плоскости некоторый выпуклый многоугольник и зафиксируем у него длины всех сторон, кроме одной. Будем понемногу увеличивать углы между этими зафиксированными сторонами. Тогда оставшаяся сторона будет увеличиваться, причем она будет увеличиваться до тех пор, пока наш многоугольник остается выпуклым. Оказывается, для эйлерова сферического многоугольника выполняется аналогичное утверждение. Для упрощения изложения будем предполагать, что все рассматриваемые сферические многоугольники лежат на единичных сферах.

**Теорема 7.1** (Тригонометрическая лемма Коши). *Рассмотрим два эйлеровых многоугольника  $W_1 = A_1 \cdots A_n$  и  $W_2 = B_1 \dots B_n$ . Обозна-*

чим через  $\widehat{A}_i$  и  $\widehat{B}_i$  величины углов этих многоугольников в вершинах  $A_i$  и  $B_i$  соответственно. Предположим, что

(1) при всех  $i = 1, \dots, n - 1$  имеем  $|A_i A_{i+1}| = |B_i B_{i+1}|$ , а

(2) при всех  $i = 2, \dots, n - 1$  имеем  $\widehat{A}_i \leq \widehat{B}_i$ , причем хотя бы одно из этих неравенств строгое.

Тогда  $|A_n A_1| < |B_n B_1|$ .

*Доказательство.* Докажем теорему индукцией по числу сторон многоугольников.

Начало индукции — сферические треугольники, для которых результат следует из сферической теоремы косинусов. Действительно, пусть  $a$ ,  $b$  и  $c$  — длины сторон некоторого эйлерова сферического треугольника, а  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$  и  $\widehat{C}$  — величины его углов, противоположных этим сторонам. Так как рассматриваемый треугольник — эйлеров, по следствию 6.37 величины  $a$ ,  $b$  и  $c$  лежат на интервале  $(0, \pi)$ . По сферической теореме косинусов (предложение 6.51), имеем

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \widehat{C}.$$

В силу ограничений на длины сторон, заключаем, что величины  $\sin a$  и  $\sin b$  положительны, так что функция  $\sin a \sin b \cos \widehat{C}$  строго монотонно убывает при  $0 < \widehat{C} < \pi$ . Кроме того, при  $c \in (0, \pi)$  функция  $\cos c$  также строго монотонно убывает. Таким образом, при фиксированных длинах  $a$  и  $b$  сторон треугольника, чем больше угол  $\widehat{C}$  между ними, тем больше длина  $c$  противоположной стороны. Применяя эти рассуждения к треугольникам  $W_1$  и  $W_2$ , получим  $|A_3 A_1| < |B_3 B_1|$ .

Предположим теперь, что теорема доказана для всех  $m$ -угольников при  $m \leq n - 1$ ,  $n \geq 4$ . Докажем, что теорема имеет место и для  $n$ -угольников. Рассмотрим два случая.

(1) При некотором  $2 \leq k \leq n - 1$  имеем  $\widehat{A}_k = \widehat{B}_k$ . По следствию 6.40, диагональ  $A_{k-1} A_{k+1}$  разбивает многоугольник  $W_1$  на эйлеров треугольник  $T_A$  с вершинами  $A_{k-1} A_k A_{k+1}$  и эйлеров многоугольник  $W_A$ . Аналогично, диагональ  $B_{k-1} B_{k+1}$  разбивает многоугольник  $W_2$  на эйлеров треугольник  $T_B$  с вершинами  $B_{k-1} B_k B_{k+1}$  и эйлеров многоугольник  $W_B$ . Из замечания 6.58 вытекает, что в треугольниках  $T_A$  и  $T_B$  равны все соответствующие стороны и углы, поэтому многоугольники  $W_A$  и  $W_B$  удовлетворяют условию теоремы и, по предположению индукции, утверждение теоремы выполняется (см. рис. 7.1).

(2) Для всех  $2 \leq i \leq n - 1$  выполняется  $\widehat{A}_i < \widehat{B}_i$ . Приводимые ниже построения проиллюстрируем на рис. 7.2.

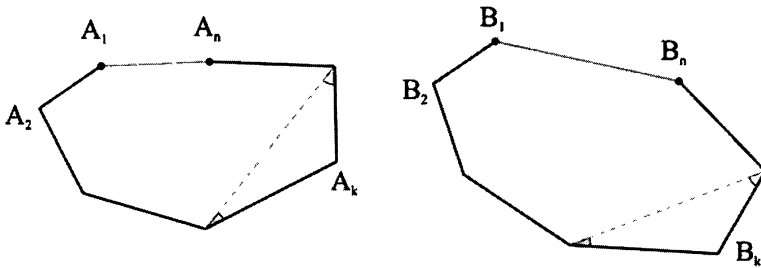


Рис. 7.1: Доказательство теоремы 7.1, случай 1: углы  $\widehat{A}_k$  и  $\widehat{B}_k$  равны

Так как  $W_1$  — эйлеров, он, по следствию 6.37, не содержит диаметрально противоположных точек, поэтому для каждого  $i = 1, \dots, n - 1$  однозначно определены малый сферический отрезок  $A_i A_{i+1}$  и сферическая прямая  $l_i \supset A_i A_{i+1}$ . По следствию 6.23, многоугольник  $W_1$  лежит в одной из полусфер, ограниченных  $l_i$ . Обозначим эту полусферу через  $\Sigma_i$ .

Так как у  $W_1$  имеется не менее четырех сторон, то  $n - 2 > 1$ , так что  $l_1 \neq l_{n-2}$ , поэтому множество  $X = \Sigma_1 \cap \Sigma_{n-2}$  является выпуклым двуугольником, причем, в силу сказанного выше,  $W_1 \subset X$ . Заметим, что угол двуугольника  $X$  не превосходит  $\pi$  в силу выпуклости, и не может равняться  $\pi$ , так как иначе вершины  $A_1, A_{n-2}$  и  $A_{n-1}$  лежали бы на одной сферической прямой, что противоречит эйлеровости  $W_1$ . Таким образом, единственные диаметрально противоположные точки в  $X$  — это его вершины, которые мы обозначим через  $Q$  и  $R$ .

Так как  $\widehat{A}_{n-1} < \pi$ , сферическая прямая  $l_{n-1}$  не проходит через  $Q$  и  $R$ , и, значит,  $Q$  и  $R$  находятся в разных открытых полусферах относительно  $l_{n-1}$ . Отсюда вытекает, что  $l_{n-1}$  делит  $X$  на два эйлеровых треугольника, один из которых, а именно  $X \cap \Sigma_{n-1}$ , содержит  $W_1$ . Оставшийся треугольник обозначим через  $\Delta$ . Тогда  $\Delta \cap W_1 = l_{n-1} \cap W_1 = A_{n-1} A_n$ , где последнее равенство имеет место в силу следствия 6.37.

Для определенности будем считать, что  $Q$  — вершина треугольника  $\Delta$ . Оставшуюся вершину  $\Delta$  обозначим через  $P$ . Ясно, что  $A_n \in A_{n-1} P$ .

Пусть  $l$  — сферическая прямая, проходящая через точки  $A_{n-1}$  и  $A_1$ . По следствию 6.40, диагональ  $A_{n-1} A_1$  делит  $W_1$  на эйлеров треугольник  $T = A_{n-1} A_n A_1$  и эйлеров многоугольник  $Z = A_1 \cdots A_{n-1}$ , причем  $T$  и  $Z$  лежат в разных полусферах относительно  $l$ . Обозначим через  $\Sigma$  ту ограниченную  $l$  полусферу, которая содержит  $T$  и, значит,  $A_n$ , а через  $\Sigma'$  — дополнительную полусферу.

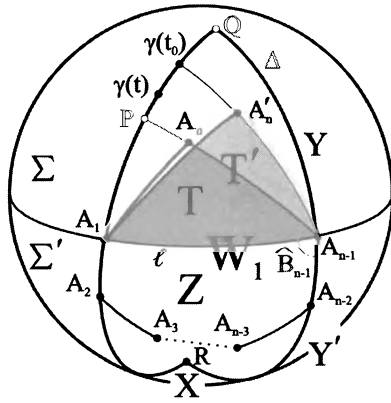


Рис. 7.2: Доказательство теоремы 7.1, случай 2:  $\widehat{A}_k < \widehat{B}_k$  для всех  $1 \leq k \leq n - 1$

Так как угол в вершине  $A_{n-1}$  многоугольника  $Z$  больше нуля и меньше  $\pi$ , прямая  $\ell$  делит  $X$  на два эйлеровых треугольника  $Y = X \cap \Sigma$  и  $Y' = X \cap \Sigma'$  (рассуждения такие же, как и для прямой  $\ell_{n-1}$ ). Из сказанного выше вытекает, что  $T \subset Y$  и  $Z \subset Y'$ .

Будем рассматривать ребро  $PQ$  треугольника  $\Delta$  как непрерывную кривую  $\gamma(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $P = \gamma(0)$ ,  $Q = \gamma(1)$ . Так как треугольник  $\Delta$  — эйлеров, каждый малый сферический отрезок  $A_{n-1}\gamma(t)$  лежит в  $\Delta$ . Кроме того, длина  $\rho(t) = |A_{n-1}\gamma(t)|$  такого сферического отрезка непрерывно зависит от  $t$  (это вытекает, например, из теоремы косинусов).

Сферическая прямая  $A_{n-1}\gamma(t)$ ,  $t < 1$ , делит  $X$  на два эйлеровых треугольника  $A_{n-1}\gamma(t)R$  и  $A_{n-1}\gamma(t)Q$ . Угол треугольника  $A_{n-1}\gamma(t)R$  при вершине  $A_{n-1}$  обозначим через  $\alpha(t)$ . Тогда, как следует из теоремы косинусов,  $\alpha(t)$  — непрерывная функция, причем  $\alpha(0) = \widehat{A}_{n-1}$  и  $\alpha(t) \rightarrow \pi$  при  $t \rightarrow 1$ . Так как  $\widehat{A}_{n-1} < \widehat{B}_{n-1} < \pi$ , существует такое  $t_0 \in (0, 1)$ , для которого  $\alpha(t_0) = \widehat{B}_{n-1}$ .

(2.1) Пусть  $|A_{n-1}A_n| < \rho(t_0)$ . Тогда на  $A_{n-1}\gamma(t_0)$  существует точка  $A'_n$  такая, что  $|A_{n-1}A'_n| = |A_{n-1}A_n|$ .

Точки  $A_1$ ,  $A_{n-1}$  и  $A'_n$  содержатся в эйлеровом треугольнике  $Y$  и не лежат на одной сферической прямой (так как  $A'_n \notin A_1A_{n-1}$ , потому что  $t_0 > 0$ ), поэтому, в силу следствия 6.47, существует единственный эйлеров треугольник  $T'$  с такими вершинами, и  $T' \subset Y$ . Кроме того, по начальному шагу индукции, сторона  $|A_1A'_n| > |A_1A_n|$ .

Далее,  $T' \cup Z$  содержится в эйлеровом треугольнике  $A_{n-1}\gamma(t_0)R$ . По следствию 6.37, этот треугольник принадлежит некоторой открытой полусфере, поэтому  $T' \cup Z$  содержится в той же открытой полусфере. Кроме того,  $T'$  и  $Z$  удовлетворяют и оставшимся условиям следствия 6.45, поэтому  $W'_1 = T' \cup Z$  — эйлеров многоугольник. Заметим также, что суммарные углы при концах общего ребра  $A_{n-1}A_1$  многоугольников  $T'$  и  $Z$  меньше  $\pi$ , поэтому  $W'_1 = A_1 \cdots A_{n-1}A'_n$ . Легко видеть, что  $W'_1$  и  $W_2$  удовлетворяют условию теоремы и, кроме того, угол многоугольника  $W'_1$  при вершине  $A_{n-1}$  равен  $\widehat{B}_{n-1}$ , поэтому применим результат пункта (1) этого доказательства. Таким образом,  $|A_1A_n| < |A_1A'_n| < |B_1B_n|$  (последнее неравенство строгое, так как  $\widehat{A}_2 < \widehat{B}_2$ ), поэтому индуктивный переход в этом случае имеет место.

(2.2) Пусть  $|A_{n-1}A_n| \geq \rho(t_0)$ . Так как  $A_n \in A_{n-1}\gamma(0)$  и  $\widehat{A}_1 < \pi$ , заключаем, что  $|A_{n-1}A_n| < \rho(0)$ . По теореме о промежуточном значении, существует такое  $t_1 \in (0, t_0]$ , для которого  $\rho(t_1) = |A_{n-1}A_n|$ . Отметим, что  $\alpha(t_1) \leq \widehat{B}_{n-1}$  и что равенство может достигаться, так как, вообще говоря,  $t_1$  может равняться  $t_0$  (ниже эта возможность приведет к отдельному рассмотрению случая  $n = 4$  в пункте 2.2.1).

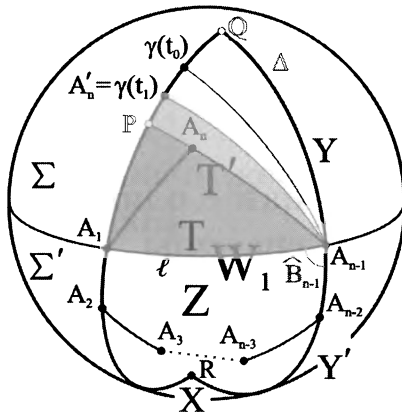


Рис. 7.3: Доказательство теоремы 7.1, случай 2.2:  $|A_{n-1}A_n| \geq \rho(t_0)$

Положим  $A'_n = \gamma(t_1)$  и вновь рассмотрим единственный эйлеров треугольник  $T' = A_1A_{n-1}A'_n$ . Дословно повторяя рассуждения пункта (2.1), заключаем, что  $W'_1 = Z \cup T'$  также является эйлеровым многоугольником, однако на сей раз точка  $A_1$  его вершиной не является ( $A_{n-1}$  — по-прежнему вершина  $W'_1$ ).



Отрежем от многоугольника  $W_2$  эйлеров треугольник  $B_1 B_2 B_n$  (см. следствие 6.40). Полученный эйлеров многоугольник обозначим через  $W'_2$ .

(2.2.1) Пусть  $n = 4$ . Тогда  $W'_1 = A'_4 A_2 A_3$  и  $W'_2 = B_4 B_2 B_3$ , причем  $|A_2 A_3| = |B_2 B_3|$ ,  $|A_3 A'_4| = |A_3 A_4| = |B_3 B_4|$ ,  $\hat{A}_3 \leq \hat{B}_3$ . Поэтому, в силу рассуждений при доказательстве начального шага индукции, имеем

$$|A_2 A_1| + |A_1 A_4| < |A_2 A_1| + |A_1 A'_4| = |A'_4 A_2| \leq |B_4 B_2| < |B_2 B_1| + |B_1 B_4|,$$

где первое и второе неравенства следуют из начального шага индукции (в первом случае сравните треугольники  $A_1 A_3 A_4$  и  $A_1 A_3 A'_4$ , а во втором — треугольники  $A_2 A_3 A'_4$  и  $B_2 B_3 B_4$ ); последнее неравенство вытекает из следствия 6.53. Так как  $|A_1 A_2| = |B_1 B_2|$ , заключаем, что  $|A_1 A_4| < |B_1 B_4|$ .

(2.2.2) Пусть  $n > 4$ , тогда, в силу  $\hat{A}_3 < \hat{B}_3$ , к многоугольникам  $W'_1$  и  $W'_2$  применимо предположение индукции, поэтому

$$|A_2 A_1| + |A_1 A_n| < |A_2 A_1| + |A_1 A'_n| = |A_2 A'_n| < |B_2 B_n| < |B_2 B_1| + |B_1 B_n|,$$

где первое неравенство снова вытекает из начального шага индукции (треугольники  $A_1 A_{n-1} A_n$  и  $A_1 A_{n-1} A'_n$ ), второе — из предположения индукции, примененного к  $W'_1$  и  $W'_2$ , а последнее неравенство имеет место в силу следствия 6.53. Используя равенство  $|A_1 A_2| = |B_1 B_2|$ , заключаем, что  $|A_1 A_n| < |B_1 B_n|$ .  $\square$

## 7.2 Многогранники с одинаковой структурой границы

Пусть  $W \subset \mathbb{R}^3$  и  $W' \subset \mathbb{R}^3$  — некоторые многогранники, а  $G$  и  $G'$  — их графы.

**Определение 7.2.** Будем говорить, что изоморфизм  $g: G \rightarrow G'$  графов многогранников  $W$  и  $W'$  *согласован со структурой граней*, если для каждой грани  $F \subset W$  отображение  $g$  переводит множество вершин этой грани взаимно однозначно на множество вершин некоторой грани второго многогранника, которую мы будем обозначать через  $g(F)$ .

Будем говорить, что границы многогранников  $W$  и  $W'$  *устроены одинаково*, если существует изоморфизм  $g$  их графов, согласованный со структурой граней и такой, что для каждой грани  $F$  многогранника  $W$  ограничение  $g$  на множество вершин грани  $F$  продолжается до движения  $\mu_F$  пространства  $\mathbb{R}^3$ , совмещающего грань  $F$  и  $g(F)$ . Описанное

только что отображение  $g$  будем называть *отождествлением границ* многогранников  $W$  и  $W'$  и записывать в виде  $g: \partial W \rightarrow \partial W'$ .

**Пример 7.3.** Перестроим правильный тетраэдр, заменив одну из его граней  $F$  на пирамиду с основанием  $F$  и вершиной, полученной из центра треугольника  $F$  смещением в перпендикулярном  $F$  направлении. Так как направление смещения можно выбрать двумя способами, при фиксированной достаточно малой величине смещения получаем два многогранника, у которых граница устроена одинаково, см. рис. 7.4.

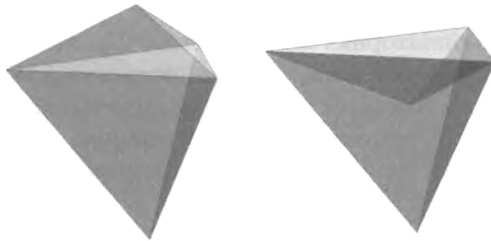


Рис. 7.4: Изоморфные, но не равные границы многогранников

Однако один из этих многогранников — выпуклый, а другой — нет, поэтому они не совмещаются никаким движением пространства.

## 7.3 Теорема Коши о жесткости выпуклых многогранников

Возникает естественный вопрос: а можно ли построить аналог примера 7.3 так, чтобы оба многогранника были выпуклыми? Оказывается, ответ на этот вопрос отрицательный. Сейчас мы сформулируем и докажем соответствующий результат. Подробности см. в [2], [3], [4], [5], [6].

**Теорема 7.4** (Коши [1]). *Предположим, что границы двух выпуклых многогранников  $W$  и  $W'$  устроены одинаково, и  $g: \partial W \rightarrow \partial W'$  — некоторое отождествление их границ. Тогда существует движение  $\mu: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  такое, что  $\mu(W) = W'$  и ограничение его на вершины, ребра и грани многогранника  $W$  совпадает с  $g$ . Иными словами, выпуклые многогранники, у которых границы устроены одинаково, равны, причем каждое отождествление границ этих многогранников порождается движением пространства, совмещающим многогранники.*

*Доказательство.* Предположим противное, т.е. что не удастся построить движение  $\mu$ . Заметим, что искомое движение  $\mu$  существует, если и только если для каждого ребра  $e$  величина  $\alpha_e$  двугранного угла многогранника  $W$  при ребре  $e$  равна величине  $\alpha'_{g(e)}$  двугранного угла многогранника  $W'$  при ребре  $g(e)$ . Поэтому наше предположение равносильно тому, что у  $W$  существует ребро  $e$ , для которого  $\alpha_e \neq \alpha'_{g(e)}$ .

Каждому ребру  $e$  из  $W$ , для которого  $\alpha_e \neq \alpha'_{g(e)}$ , припишем знак “+”, если  $\alpha_e > \alpha'_{g(e)}$ , и знак “-”, если  $\alpha_e < \alpha'_{g(e)}$ . Если  $\alpha_e = \alpha'_{g(e)}$ , то такому ребру  $e$  ничего приписывать не будем.

**Лемма 7.5** (Комбинаторная лемма Коши). *Предположим, что некоторые ребра границы  $\partial W$  выпуклого многогранника  $W$  помечены произвольным образом плюсами и минусами, причем хотя бы одно ребро помечено. Тогда в  $W$  существует такая вершина, при обходе которой число перемен знака инцидентных ей помеченных ребер меньше 4.*

*Доказательство.* Заметим сначала, что если произвольным образом пометить ребра, оставшиеся непомеченными, то число перемен знаков при обходе каждой вершины может лишь увеличиться. Поэтому если мы докажем лемму для полностью помеченных графов, то она будет также верна и для частично помеченных. Далее, напомним, что при доказательстве планарности графа выпуклого многогранника (следствие 5.28) мы строили некоторое отображение  $\nu$  из части границы многогранника на плоскость, являющееся гомеоморфизмом с образом и, значит, сохраняющее порядок выходящих из вершин многогранника ребер. Таким образом, для доказательства леммы достаточно показать следующее.

Пусть  $H$  — произвольный плоский простой граф, каждая грань которого (как и в случае  $\nu$ -образа графа многогранника  $W$ ) представляет собой область, ограниченную замкнутой непрерывной кривой без самопересечений, разбитой на конечное число ребер. Предположим, что все ребра графа  $H$  помечены плюсами и минусами. Тогда найдется вершина, при обходе которой число перемен знака будет меньше 4.

Обозначим через  $v$ ,  $e$  и  $f$  число вершин, ребер и граней графа  $H$ , а через  $c$  — суммарное количество перемен знака при обходах всех вершин графа  $H$ . Доказательство проведем методом от противного, т.е. предположим, что существует такой граф  $H$ , при обходе каждой вершины которого имеется не менее 4 перемен знака. Тогда  $c \geq 4v$ . Кроме того, каждая пара смежных ребер, последовательных при обходе их общей вершины, лежит по крайней мере в одной грани. Следовательно, число  $c$  не превосходит суммы вкладов граней графа  $H$ , где вклад

каждой грани равен количеству пар различно помеченных смежных ребер, входящих в эту грань. Таким образом, если количество ребер грани равно  $2k$  или  $2k + 1$ , то ее максимальный вклад в  $c$  равен  $2k$ . Последнее удобнее записать по-другому: максимальный вклад в  $c$  грани, содержащей  $i$  ребер, равен  $2[i/2]$ , где  $[x]$  обозначает целую часть числа  $x$ , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ .

Обозначим через  $f_i$  количество граней, каждая из которых ограничена  $i$  ребрами. Так как граф  $H$  — простой,  $f_i = 0$  при  $i < 3$ . Из сказанного выше заключаем, что

$$4v \leq c \leq \sum_{i \geq 3} 2[i/2]f_i.$$

С другой стороны,

$$2e = \sum_{i \geq 3} i f_i, \quad 2f = \sum_{i \geq 3} 2f_i,$$

откуда, по формуле Эйлера,

$$4 = 2v - 2e + 2f \leq \sum_{i \geq 3} ([i/2] - i + 2)f_i \leq 0,$$

где последнее неравенство имеет место в силу того, что  $[i/2] - i + 2 \leq 0$  при  $i \geq 3$ . Полученное противоречие и завершает доказательство леммы.  $\square$

Доказанная только что лемма противоречит следующему. Пусть  $v$  — вершина многогранника  $W$ , из которой выходит помеченное ребро (такая вершина существует по предположению). Рассмотрим сферы  $S$  и  $S'$  с центрами в  $v$  и  $g(v)$  одинаковых радиусов, настолько малых, что ограниченные ими шары пересекают только инцидентные этим вершинам ребра и грани. Тогда  $X = S \cap W$  и  $X' = S' \cap W'$  — эйлеровы многоугольники. Действительно, эти пересечения — выпуклые многоугольники в силу выпуклости многогранников. При этом никакие три вершины каждого из этих многоугольников не лежат на сферической прямой по следствию 5.25.

Соответствие  $g$  порождает соответствие между вершинами и ребрами сферических многоугольников  $X$  и  $X'$ . Так как  $g$  сохраняет углы граней, у многоугольников  $X$  и  $X'$  соответствующие стороны равны. С другой стороны, расстановка знаков на ребрах многогранника  $W$  индуцирует расстановку знаков в вершинах сферического многоугольника  $X$ : знак “+” означает, что соответствующий угол многоугольника  $X'$

меньше рассматриваемого угла многоугольника  $X$ , знак “—” означает, что больше, а отсутствие метки — равенство углов.

**Лемма 7.6.** *В сделанных выше обозначениях, число перемен знака при движении по границе многоугольника  $X$  не меньше 4.*

*Доказательство.* Как мы уже отметили,  $X$  и  $X'$  являются эйлеровыми многоугольниками, поэтому они однозначно задаются последовательностями своих вершин. Пусть  $X = A_1 \cdots A_n$  и  $X' = B_1 \cdots B_n$ , причем будем считать, что  $g(A_i) = B_i$  при всех  $i$ . Для дальнейшего воспользуемся обозначениями из теоремы 7.1 и положим  $\delta_i = \widehat{A}_i - \widehat{B}_i$ . По сделанному выше предположению, не все  $\delta_i$  равны нулю. Покажем, что тогда в последовательности  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \delta_1$  имеется не менее 4 перемен знака.

Докажем сначала, что имеется хотя бы одно изменение знака. Если это не так, то, без ограничения общности, можно считать, что для всех  $k = 2, \dots, n-1$  имеем  $\widehat{A}_k \leq \widehat{B}_k$ , причем одно из этих неравенств — строгое (если строгое неравенство пришлось на  $k = 1$  или  $k = n$ , то перенумеруем вершины). Но тогда, по теореме 7.1, имеем  $|A_1 A_n| < |B_1 B_n|$ , противоречие. Итак, имеется хотя бы одна переменна знака. Но так как мы при обходе возвращаемся к первоначальной разности  $\delta_1$ , число перемен знака должно быть четным. Таким образом, нам осталось показать, что не может быть ровно двух перемен знака.

Предположим противное. Тогда, сделав подходящие перенумерации вершин, мы получаем, что для некоторого  $1 \leq m < n$  выполняется  $\widehat{A}_i \leq \widehat{B}_i$  при всех  $1 \leq i \leq m$ , а для  $m+1 \leq i \leq n$  имеем  $\widehat{A}_i \geq \widehat{B}_i$ , причем как в первой группе неравенств, так и во второй имеются строгие неравенства. Пусть  $K, L, M$  и  $N$  — середины сторон  $A_1 A_n, A_m A_{m+1}, B_1 B_n$  и  $B_m B_{m+1}$  соответственно, см. рис. 7.5. По следствию 6.38, малые сферические отрезки  $KL$  и  $NM$  делят  $X$  и  $X'$  соответственно на два эйлеровых многоугольника, удовлетворяющих условиям теоремы 7.1.

Тогда, по этой теореме, примененной к многоугольникам

$$KA_1 \dots A_m L \text{ и } MB_1 \dots B_m N,$$

имеем  $|KL| < |MN|$ , но, по той же теореме, примененной к многоугольникам

$$LA_{m+1} \dots A_n K \text{ и } NB_{m+1} \dots B_n M,$$

имеем  $|KL| > |MN|$ , противоречие, завершающее доказательство леммы.  $\square$

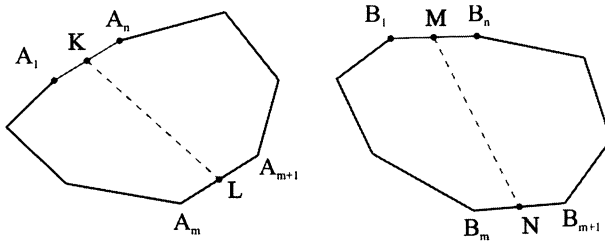


Рис. 7.5: Завершение доказательства теоремы Коши

Применяя леммы 7.5 и 7.6, получаем противоречие, которое и завершает доказательство теоремы.  $\square$

## 7.4 Изгибаемые многогранники

Зададимся следующим вопросом: существуют ли такие многогранники, у которых можно менять двугранные углы, не деформируя при этом грани? Такие многогранники называются *изгибаемыми*. Теорема Коши утверждает, что все выпуклые многогранники неизгибаемы. Существуют ли (невыпуклые) изгибаемые многогранники?

Прежде чем перейти к изложению материала, отметим, что в современной литературе рассматривается более общее понятие многогранников, допускающих самопересечения. Именно в таком, более широком классе, были построены первые примеры изгибаемых многогранников (октаэдр Р. Брикара [7], 1897 год). Рассмотрим пространственный четырехугольник  $ABCD$ , у которого равны противоположные стороны. Если он не лежит в плоскости, то середины его диагоналей не совпадают, и через них проходит единственная прямая, которую мы обозначим через  $\ell$ . Легко доказать (сделайте это), что прямая  $\ell$  перпендикулярна отрезкам  $AC$  и  $BD$ . Пусть  $S$  — точка, лежащая вне прямой  $\ell$  и прямых, проходящих через пары вершин четырехугольника  $ABCD$ . Рассмотрим четыре треугольника, вершины которых совпадают с  $S$ , а основания — со сторонами четырехугольника  $ABCD$ , см. рис. 7.6.

Эти треугольники лежат на соответствующем четырехгранном угле, который можно деформировать, меняя его двугранные углы, но сохраняя плоские и, значит, сохраняя построенные треугольники. Пусть  $S'$  — точка, симметричная  $S$  относительно прямой  $\ell$ . Так как  $S \notin \ell$ , то  $S' \neq S$ . Построим теперь еще четыре треугольника, вершины которых совпадают с  $S'$ , а основания — со сторонами четырехугольника  $ABCD$ .

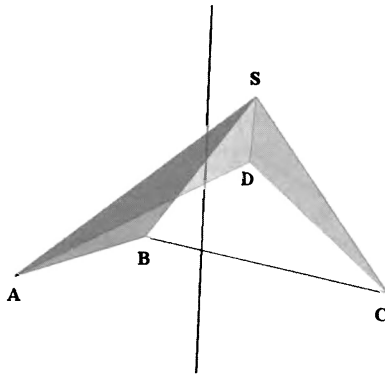


Рис. 7.6: “Половина” октаэдра Брикара

Эти четыре треугольника симметричны первым четырем относительно прямой  $\ell$ , поэтому при описанной выше деформации первого четырехгранного угла также деформируется и второй четырехгранный угол, меняя свои двугранные углы, но сохраняя плоские, вместе с построенными треугольниками. Объединение полученных 8 треугольников и образуют *октаэдр Брикара*, см. рис. 7.7.

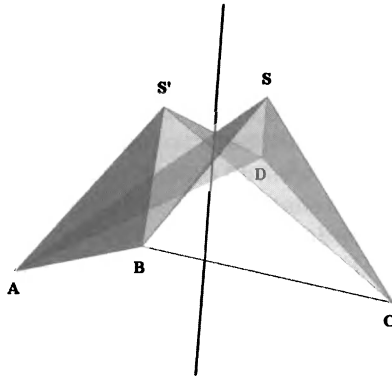


Рис. 7.7: Октаэдр Брикара

Из построения вытекает, что октаэдр Брикара изгибаем. Динамическую реализацию этого изгибания можно посмотреть в [8].

В 1977 году Р. Конелли [9] построил первый пример изгибаемого многогранника, не имеющего самопересечений. Несколько позже, в 1979 году, К. Штеффен построил пример изгибаемого многогранника без самопересечений с наименьшим на сегодняшний день числом вершин, см. например [4] или [10] (И. Г. Максимов [11] показал, что все многогранники без самопересечений с не более чем 8 вершинами, за исключением, возможно, многогранников одного комбинаторного типа, неизгибаемы). На рис. 7.8 изображена развертка многогранника Штеффена и схема склейки. На рис. 7.9 приведен внешний вид многогранника Штеффена. Динамическую реализацию изгибания многогранника Штеффена также можно посмотреть в [8].

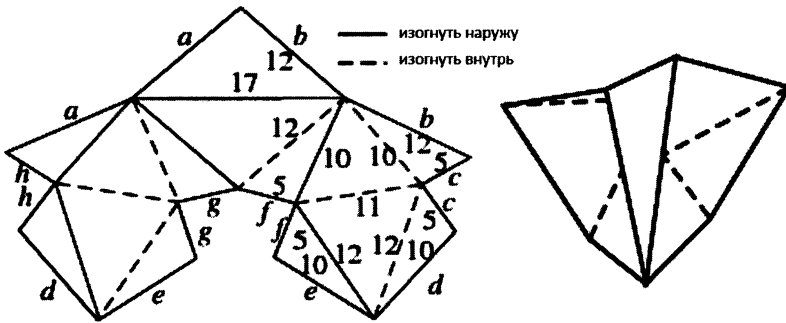


Рис. 7.8: Развертка, схема склейки и эскиз многогранника Штеффена

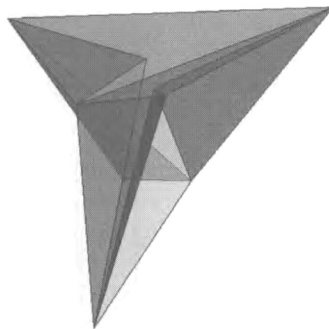


Рис. 7.9: Внешний вид многогранника Штеффена





Рис. 7.10: Баян (фото Henry Doktorski)

Существование изгибаемых многогранников без самопересечений может показаться неувидительным, так как каждый из нас наблюдал игру на баяне, мехи которого, изгибаясь, меняют свою форму, уменьшают ограниченный ими объем, за счет чего поток воздуха, вытесняемого из мехов, создает звук.

Другой хорошо известный пример таких “изгибаний” — кузнечные меха, которые используются для раздувания огня в печи.



Рис. 7.11: Кузнечные меха

Однако, оказывается, ни один из этих “наглядных” примеров не может моделировать изгибаемый многогранник в силу теоремы И. Х. Сабитова [12], доказанной в 1996 году и утверждающей, что изгибаемые многогранники “не дышат”. Тем самым теорема Сабитова дает решение давно стоявшей “гипотезы кузнечных мехов”.

**Теорема 7.7** (Сабитов [12]). *При изгибании многогранника без самопересечений его объем не меняется.*

## Литература к главе 7

- [1] Cauchy A.L. *Recherche sur les polyedres - premier memoire*, Journal de l'Ecole Polytechnique, 1813, N 9, 66–86.
- [2] Александров А.Д. *Выпуклые многогранники*. Москва, Ленинград, Гос. изд-во технико-теоретич. лит-ры, 1950.
- [3] Айнгер М., Циглер Г. *Доказательства из Книги. Лучшие доказательства со времен Евклида до наших дней*. М.: Изд-во Мир, 2006.
- [4] Берже М. *Геометрия*. М.: Мир, 1984, т. 1, 2.
- [5] Долбилин Н.П. *Три теоремы о выпуклых многогранниках (продолжение)*. Квант, 2001, N 6, 3–10.
- [6] Долбилин Н.П. *Жемчужины теории многогранников*. К-М.: МЦНМО, 2000.
- [7] Bricard R. *Memoire sur la theorie de l'octaedre articule*. J. Math. Pures Appl., 1897, N 3, pp. 113–150.
- [8] <http://ru.wikipedia.org/>, статья *Изгибаемый многогранник*.
- [9] Connelly R. *The rigidity of polyhedral surfaces*, Math. Mag., 1979, v. 52, N 5, pp. 275–283.
- [10] Cromwell P. R. *Polyhedra*. New York: Cambridge University Press. 1997.
- [11] Максимов И.Г. *Неизгибаемые многогранники с малым количеством вершин*. Фундам. прикл. матем. 2006, т. 12, N 1, с. 143–165.
- [12] Сабитов И. Х. *Объем многогранника как функция длин его ребер*. Фундам. прикл. матем., 1996, т. 2, N 1, с. 305–307.

## Упражнения к главе 7

**Упражнение 7.1.** Докажите, что правильные многогранники определены однозначно с точностью до подобия.

**Упражнение 7.2.** Изобразите граф и двойственный граф октаэдра Брикара в виде плоских графов.

**Упражнение 7.3.** Пусть  $A_1A_2A_3A_4$  — тетраэдр, а  $q_{ij} = q_{ji}$  обозначает квадрат расстояния между  $A_i$  и  $A_j$ . Докажите, что квадрат объема  $V$  этого тетраэдра может быть вычислен как многочлен от величин  $q_{ij}$  по следующей формуле:

$$V^2 = \frac{1}{288} \begin{vmatrix} 0 & q_{12} & q_{13} & q_{14} & 1 \\ q_{21} & 0 & q_{23} & q_{24} & 1 \\ q_{31} & q_{32} & 0 & q_{34} & 1 \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

**Упражнение 7.4.** Используя результаты предыдущего упражнения, докажите, что не существует тетраэдра, основание которого — правильный треугольник со стороной 1, а боковые стороны равны  $3/2$ ,  $2/3$  и  $3/4$ .

## Глава 8

# Равновеликость и равносоставленность. Третья проблема Гильберта

**План.** Площади и объемы, их инвариантность и аддитивность, разрезание многоугольников, равноставленные многоугольники, равновеликие многоугольники, двумерный случай: теорема Бойяи–Валласа–Гервина, разрезание многогранников, равноставленные многогранники, равновеликие многогранники, третья проблема Гильберта, зависимость на множестве вещественных чисел, аддитивная функция, функция Дена многогранника, инвариант Дена, теорема Дена, тетраэдр Хилла, равнодополняемые многогранники, координатный тетраэдр, решение Третьей проблемы Гильберта, теорема Дена–Сидлера.

Проблемы, обсуждаемые в этой главе, имеют непосредственное отношение к вычислению площадей и объемов. Известное из курса математического анализа определение этих понятий, основанное на предельном переходе, часто приводит к сложным вычислениям, сводящимся фактически к взятию соответствующего интеграла. Однако в некоторых случаях вычисления можно существенно упростить, если воспользоваться следующими соображениями (мы сформулируем их для плоского случая; пространственный случай получается заменой слова “площадь” на слово “объем”): (1) площади равных фигур одинаковы (инвариантность площади); (2) если фигура  $F$  представлена в виде объединения конечного числа фигур  $F_1, \dots, F_n$ , не имеющих общих внутренних точек, то площадь фигуры  $F$  равна сумме площадей фигур  $F_i$  (аддитивность площади). Таким образом, если для фигур

$F$  и  $G$  заданы такие представления с помощью фигур  $F_1, \dots, F_n$  и  $G_1, \dots, G_n$  соответственно, и при каждом  $i$  фигуры  $F_i$  и  $G_i$  равны, то  $F$  и  $G$  имеют одинаковые площади.

Хорошо известный пример применения изложенной идеи — вычисление площади параллелограмма через площадь прямоугольника, а также площади треугольника через площадь параллелограмма. Еще одно приложение техники, основанной на описанном выше представлении многоугольников, — доказательство теоремы Пифагора, рис. 8.1.

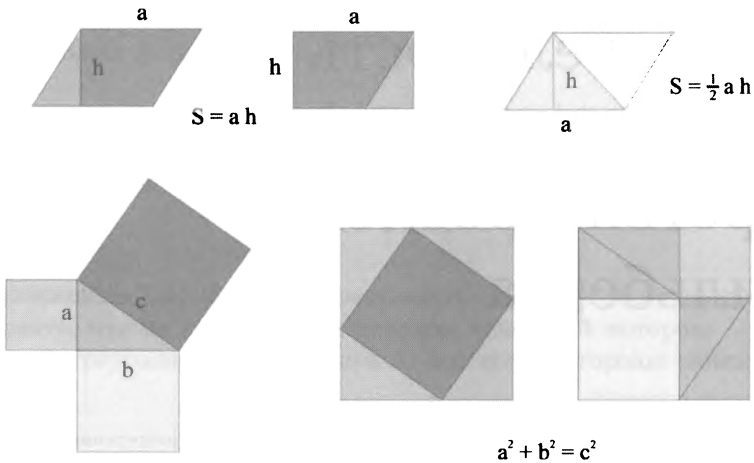


Рис. 8.1: Простейшие применения идеи равносоставленности

Отметим, что для многоугольников  $F$  в качестве фигур  $F_i$  принято также рассматривать многоугольники. Приведем теперь необходимые формальные определения.

**Определение 8.1.** Пусть  $F$  и  $F_1, \dots, F_n$  — многоугольники, для которых выполняются следующие условия:

- (1) при каждом  $i$  и  $j \neq i$  многоугольники  $F_i$  и  $F_j$  не имеют общих внутренних точек;
- (2)  $F = \cup_{i=1}^n F_i$ .

Тогда говорят, что  $F$  разрезан на многоугольники  $F_i$ .

**Определение 8.2.** Пусть  $F$  и  $G$  — два многоугольника. Если  $F$  и  $G$  можно так разрезать на многоугольники  $F_1, \dots, F_n$  и  $G_1, \dots, G_n$  соответственно, что при каждом  $i = 1, \dots, n$  многоугольники  $F_i$  и  $G_i$  равны, то  $F$  и  $G$  называются *равноставленными*.

**Определение 8.3.** Многоугольники  $F$  и  $G$  называются *равновеликими*, если их площади равны.

Как уже отмечалось, равноставленные многоугольники равновелики. Верно ли обратное? Замечательно, что ответ положительный. Соответствующий результат называется *теоремой Бойяи–Валласа–Гервина*.

**Теорема 8.4** (Бойяи, Валлас, Гервин [3]). *Два многоугольника равновелики в том и только том случае, когда они равноставлены.*

**Замечание 8.5.** Бойяи (Farkas Bolyai) в 1790 году сформулировал проблему, Валлас (William Wallace) решил ее в 1807 году, Гервин (Paul Gerwien) решил ее вновь в 1833 году, и, наконец, Бойяи, не зная о существовании этих решений, дал свое в 1835 году, см. [1].

Следующий шаг — попробовать обобщить полученные результаты на многогранники. Начнем с соответствующих определений (дословно повторяющих определения 8.1, 8.2 и 8.3 с заменой слов “многоугольник” на “многогранник” и “площадь” на “объем”).

**Определение 8.6.** Пусть  $W$  и  $W_1, \dots, W_n$  — многогранники, для которых выполняются следующие условия:

- (1) при каждом  $i$  и  $j \neq i$  многогранники  $W_i$  и  $W_j$  не имеют общих внутренних точек;
- (2)  $W = \cup_{i=1}^n W_i$ .

Тогда говорят, что  $W$  *разрезан на многогранники*  $W_i$ .

**Определение 8.7.** Пусть  $A$  и  $B$  — два многогранника. Если  $A$  и  $B$  можно так разрезать на многогранники  $A_1, \dots, A_n$  и  $B_1, \dots, B_n$  соответственно, что при каждом  $i = 1, \dots, n$  многогранники  $A_i$  и  $B_i$  равны, то  $A$  и  $B$  называются *равноставленными*.

**Определение 8.8.** Многогранники  $A$  и  $B$  называются *равновеликими*, если их объемы равны.

Верно ли, что равновеликие многогранники равноставлены? Ответ на этот вопрос оказался отрицательным, что было показано Деном [2], построившим специальные функции от длин ребер и величин двугранных углов многогранника, которые не меняются при замене многогранника на любой другой, равноставленный с ним. Такие функции называются теперь *инвариантами Дена*. Оказалось, что для куба и равновеликого ему правильного тетраэдра можно построить такой инвариант Дена, который на кубе и на правильном тетраэдре принимает разные значения, поэтому такие куб и тетраэдр не равноставлены. Более того, можно показать, что они также и не *равнодополняемы*, т.е. не могут быть дополнены равными многогранниками до равных и даже до равноставленных многогранников. Кроме того, инварианты Дена позволили доказать существование тетраэдров с равными основаниями и равными высотами, которые не являются равнодополняемыми (в частности, равноставленными). Таким образом, была решена *третья проблема Гильберта*, в которой поднимался вопрос о существовании таких тетраэдров.

Отметим, что инварианты Дена и сама его работа [2] были трудны для понимания. Ряд математиков упростили доказательство Дена (см. историю вопроса в [3]). Возможно, наиболее простой подход к равноставленности изложен в [4]. Именно его мы и будем обсуждать. Материал этой главы частично опирается на [3] и на [5].

## 8.1 Критерий равноставленности многогранников

В этом параграфе мы определим инварианты Дена и покажем, как можно их использовать для ответа на вопрос о том, являются ли данные многогранники равноставленными.

**Определение 8.9.** Пусть  $M$  — какое-нибудь множество вещественных чисел. Каждое соотношение  $n_1x_1 + \dots + n_kx_k = 0$ , где  $x_i \in M$ , а  $n_i$  — целые числа, будем называть *зависимостью на  $M$* . Функцию  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  будем называть *аддитивной*, если она “уважает” зависимости, т.е. для каждой зависимости  $n_1x_1 + \dots + n_kx_k = 0$  на  $M$  выполняется  $n_1f(x_1) + \dots + n_kf(x_k) = 0$ .

**Конструкция 8.10.** Пусть  $W$  — некоторый многогранник, и  $E$  — множество его ребер. Для каждого  $e \in E$  через  $|e|$  обозначим длину ребра  $e$ , а через  $\alpha_e$  — величину двугранного угла многогранника  $W$  при

этом ребре. Положим  $\alpha(W) = \{\alpha_e : e \in E\}$ . Пусть  $M$  — произвольное множество вещественных чисел, содержащее  $\alpha(W)$  и число  $\pi$ .

**Определение 8.11.** Во введенных выше обозначениях, каждую аддитивную функцию  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ , для которой  $f(\pi) = 0$ , будем называть *функцией Дена многогранника  $W$* , а число  $f(W) = \sum_{e \in E} |e| f(\alpha_e)$  — *инвариантом Дена*, отвечающим  $f$ .

**Замечание 8.12.** Если множество  $M$  содержит  $\pi$  и все множества  $\alpha(W_i)$ , где  $W_1, \dots, W_k$  — некоторое семейство многогранников, то аддитивная функция  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ , зануляющаяся на  $\pi$ , является функцией Дена одновременно для всех  $W_i$ .

**Теорема 8.13.** Пусть  $A$  и  $B$  — равносоставленные многогранники, а  $f$  — произвольная функция Дена для  $A$  и  $B$ . Тогда  $f(A) = f(B)$ .

Прежде, чем доказывать эту теорему, приведем некоторые ее следствия. В частности, покажем, как с ее помощью решается третья проблема Гильберта.

## 8.2 Примеры вычисления инвариантов Дена

**Предложение 8.14.** Каждый инвариант Дена для куба равен нулю.

*Доказательство.* Обозначим рассматриваемый куб через  $K$ , и пусть  $a$  — длина его стороны. Пусть  $f$  — произвольная функция Дена для куба  $K$ . Так как все двугранные углы куба равны  $\pi/2$ , и  $2 \cdot \pi/2 - \pi = 0$  — зависимость, имеем  $0 = 2f(\pi/2) - f(\pi) = 2f(\pi/2)$ . Следовательно,  $f(K) = \sum_{i=1}^{12} a \cdot f(\pi/2) = 0$ .  $\square$

**Предложение 8.15.** Каждый инвариант Дена для призмы равен нулю.

*Доказательство.* Обозначим рассматриваемую призму через  $P$ . Пусть  $f$  — произвольная функция Дена для этой призмы. Обозначим через  $e_1, \dots, e_n$  ребра нижнего основания призмы  $P$ , через  $e'_1, \dots, e'_n$  соответствующие ребра верхнего основания призмы, и через  $h_1, \dots, h_n$  боковые ребра призмы  $P$ . Тогда при каждом  $i$  выполняется  $|e_i| = |e'_i|$  и  $\alpha_{e_i} + \alpha_{e'_i} = \pi$ . Кроме того,  $|h_1| = \dots = |h_n|$  и  $\sum_i \alpha_{h_i} = \pi(n-2)$  (плоское сечение соответствующего призме цилиндра, перпендикулярное образующим, является плоским  $n$ -угольником). Отсюда вытекает,



что

$$\begin{aligned} 0 &= f(\alpha_{e_i}) + f(\alpha_{e'_i}) - f(\pi) = f(\alpha_{e_i}) + f(\alpha_{e'_i}), \\ 0 &= \sum_i f(\alpha_{h_i}) - (n-2)f(\pi) = \sum_i f(\alpha_{h_i}). \end{aligned}$$

Используем приведенные только что формулы для вычисления  $f(P)$ :

$$\begin{aligned} f(P) &= \sum_{i=1}^n |e_i|f(\alpha_{e_i}) + \sum_{i=1}^n |e'_i|f(\alpha_{e'_i}) + \sum_{i=1}^n |h_i|f(\alpha_{h_i}) = \\ &= \sum_{i=1}^n |e_i|(f(\alpha_{e_i}) + f(\alpha_{e'_i})) + |h_1| \sum_{i=1}^n f(\alpha_{h_i}) = 0. \end{aligned}$$

□

### 8.3 Некоторые следствия из теоремы Дена

**Следствие 8.16.** *Правильный тетраэдр и куб не равноставлены.*

*Доказательство.* Легко видеть, что все двугранные углы  $\alpha$  правильного тетраэдра равны  $\arccos(1/3)$ . У куба двугранные углы равны  $\pi/2$ . Зададим на множестве  $\{\alpha, \pi/2, \pi\}$  функцию  $f$ , положив  $f(\alpha) = 1$ ,  $f(\pi/2) = 0$  и  $f(\pi) = 0$ . Покажем, что  $f$  — функция Дена. Так как  $f(\pi) = 0$ , достаточно доказать аддитивность  $f$ .

Рассмотрим произвольную зависимость  $n_1\alpha + n_2\pi/2 + n_3\pi = 0$ . Докажем, что  $n_1 = 0$ . Действительно, если это не так, то  $\alpha/\pi$  — рациональное число. Следующая лемма говорит о том, что такого быть не может.

**Лемма 8.17.** *Число  $\frac{1}{\pi} \arccos(1/3)$  — иррационально.*

*Доказательство.* Положим  $\alpha = \arccos(1/3)$  и покажем, что  $\cos(k\alpha)$  при всех натуральных  $k$  имеет вид  $a_k/3^k$ , где  $a_k$  — целое, не делящееся на 3. Доказательство проведем индукцией по  $k$ . Для  $k = 1$  это так. Для  $k = 2$  это тоже так в силу того, что  $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = -7/9$ . Предположим, что утверждение доказано для всех  $k < n$ , где  $n \geq 3$ . Тогда

$$\cos(n\alpha) + \cos((n-2)\alpha) = 2\cos((n-1)\alpha)\cos\alpha = 2a_{n-1}/3^n,$$

откуда  $\cos(n\alpha) = 2a_{n-1}/3^n - a_{n-2}/3^{n-2} = (2a_{n-1} - 9a_{n-2})/3^n$ . Осталось заметить, что числитель не делится на 3, так как  $a_{n-1}$  не делится на 3 по предположению.

Покажем теперь, что  $\alpha/\pi$  иррационально. Предположим противное, т.е.  $\alpha = \frac{p}{q}\pi$ , где  $p \neq 0$  и  $q > 0$  — целые числа, тогда  $\cos(q\alpha) = \pm 1$ , чего не может быть в силу того, что мы доказали выше.  $\square$

Итак, в каждой зависимости  $n_1 = 0$ , поэтому осталось проверить, что если  $n_2\pi/2 + n_3\pi = 0$ , то  $n_2f(\pi/2) + n_3f(\pi) = 0$ . Однако это так по определению функции  $f$ .

Вычислим теперь инварианты Дена, соответствующие функции  $f$ . По предложению 8.14, каждый инвариант Дена для куба равен нулю. Пусть  $T$  — рассматриваемый правильный тетраэдр, и  $a$  — длина его стороны. Тогда  $f(T) = \sum_{i=1}^6 a f(\alpha) = 6a \neq 0$ , поэтому, в силу теоремы 8.13, тетраэдр  $T$  и куб не равносоставлены.  $\square$

**Конструкция 8.18.** Рассмотрим тетраэдр  $T_1$ , основание которого — равнобедренный прямоугольный треугольник, а высота равна катету основания и падает в один из концов гипотенузы основания, см. рис. 8.2, слева.

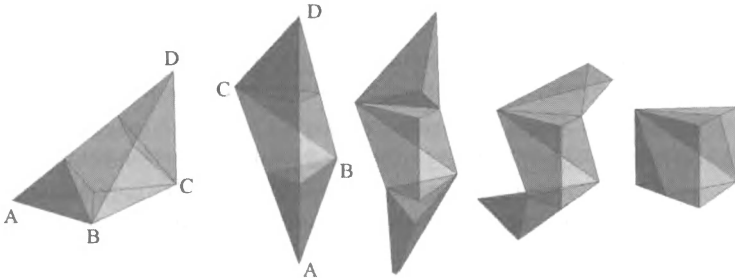


Рис. 8.2: Тетраэдр Хилла равносоставлен с прямоугольной призмой

**Определение 8.19.** Многогранник  $T_1$  называется *тетраэдром Хилла*.

**Предложение 8.20.** *Тетраэдр Хилла равносоставлен с некоторой призмой.*

*Доказательство.* Разрезание тетраэдра Хилла на три части, из которых составляется прямоугольная призма, также представлено на рис. 8.2 (отметим, что у Хилла было другое разбиение). Преобразование тетраэдра Хилла в прямоугольную призму можно хорошо изучить с помощью презентации, подготовленной в пакете Mathematica<sup>1</sup> [8].  $\square$

<sup>1</sup>При работе над книгой авторы использовали версию Mathematica 9.0.1, лицензия 3583-9588.

**Следствие 8.21.** *Каждый инвариант Дена тетраэдра Хилла равен нулю.*

*Доказательство.* Из предложения 8.20 и теоремы 8.13 вытекает, что у тетраэдра Хилла каждый инвариант Дена — такой же, как и у призмы. Следовательно, по предложению 8.15, каждый инвариант Дена тетраэдра Хилла равен нулю.  $\square$

## 8.4 Доказательство теоремы Дена

На понадобится следующий технический результат.

**Предложение 8.22.** *Пусть  $M$  — множество вещественных чисел и  $x \in \mathbb{R}$ . Тогда каждая аддитивная функция  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  продолжается до некоторой аддитивной функции на  $M \cup \{x\}$ .*

*Доказательство.* Если  $x \in M$ , то функцию  $f$  менять не будем. Пусть теперь  $x \notin M$ .

Если в каждую зависимость элементов множества  $M \cup \{x\}$  число  $x$  входит с нулевым коэффициентом, то при любом значении  $f(x)$  продолженная функция  $f$  уважает все зависимости (так как они являются зависимостями на  $M$ ).

Пусть теперь для некоторых целых  $n_i$  и  $n \neq 0$ , а также вещественных  $x_i \in M$ , имеем  $nx + \sum n_i x_i = 0$ . Положим  $f(x) = -\frac{\sum n_i f(x_i)}{n}$  и покажем, что так продолженная  $f$  является аддитивной. Последнее означает, что для любой зависимости  $mx + \sum m_j y_j = 0$  должно иметь место  $m f(x) + \sum m_j f(y_j) = 0$ . Докажем, что это так и есть. Для этого заметим, что  $m \sum n_i x_i - n \sum m_j y_j = 0$  — зависимость на  $M$ , поэтому  $m \sum n_i f(x_i) - n \sum m_j f(y_j) = 0$ , откуда

$$m f(x) + \sum m_j f(y_j) = \frac{-m \sum n_i f(x_i) + n \sum m_j f(y_j)}{n} = 0.$$

$\square$

**Следствие 8.23.** *Пусть  $W$  — некоторый многогранник и  $f$  — его функция Дена. Рассмотрим произвольные многогранники  $W_1, \dots, W_n$ . Тогда  $f$  продолжается до функции Дена для всех многогранников  $W_i$ .*

*Доказательство.* Будем расширять область определения функции  $f$ , последовательно добавляя величины двугранных углов многогранников  $W_i$  и продолжая  $f$  до аддитивной функции, что можно сделать в силу предложения 8.22.  $\square$

**Пример 8.24.** Покажем, как работает следствие 8.23.

**Следствие 8.25.** *Тетраэдр Хилла и правильный тетраэдр не равносоставлены.*

*Доказательство.* Пусть  $f$  — функция Дена, построенная в доказательстве следствия 8.16. Тогда ее значение на правильном тетраэдре отлично от нуля. Продолжим  $f$  до функции Дена для тетраэдра Хилла, что можно сделать в силу следствия 8.23. По следствию 8.21, значение  $f$  на тетраэдре Хилла равно нулю. Поэтому, в силу теоремы 8.13, рассматриваемые тетраэдры не равносоставлены.  $\square$

В формулировке приводимого ниже предложения также используется следствие 8.23.

**Предложение 8.26** (аддитивность инварианта Дена). *Пусть  $W$  — произвольный многогранник, разбитый на многогранники  $W_1, \dots, W_n$ , и  $f$  — некоторая функция Дена для  $W$ . Обозначим той же буквой произвольное продолжение  $f$  до функции Дена для всех многогранников  $W_1, \dots, W_n$ . Тогда  $f(W) = \sum_{i=1}^n f(W_i)$ .*

*Доказательство.* Пусть  $e$  — ребро многогранника  $W$  или одного из многогранников  $W_i$ . Рассмотрим все вершины этих многогранников, попавшие на  $e$ , а также все точки пересечения ребра  $e$  с другими ребрами этих многогранников. Тогда ребро  $e$  разобьется этими точками на отрезки, которые будем называть *звеньями*.

Обозначим через  $\mathcal{E}$  множество всех звеньев, каждое из которых лежит в некотором ребре многогранника  $W$ . Покажем, что

$$(8.1) \quad f(W) = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} |\varepsilon| f(\alpha_\varepsilon).$$

Действительно, ребро  $e$  многогранника  $W$  дает вклад  $|e| f(\alpha_e)$  в левую часть формулы (8.1), т.е. в  $f(W)$ , а все звенья  $\varepsilon \in \mathcal{E}$ , лежащие в  $e$ , дают вклад в правую часть формулы (8.1), равный  $\sum_{\varepsilon \subset e} |\varepsilon| f(\alpha_\varepsilon) = \sum_{\varepsilon \subset e} |\varepsilon| f(\alpha_e) = |e| f(\alpha_e)$ .

Покажем теперь, что величина  $\sum_{i=1}^n f(W_i)$  равна правой части формулы 8.1. Для этого рассмотрим сначала все звенья, не попавшие в  $\mathcal{E}$ , и покажем, что они дают нулевой вклад в величину  $\sum_{i=1}^n f(W_i)$ . Действительно, они могут быть двух типов: (1) звенья, лежащие в гранях многогранника  $W$ , и (2) звенья, внутренности которых лежат внутри многогранника  $W$ .

Пусть  $\varepsilon$  — звено первого типа, и пусть  $W_{i_1}, \dots, W_{i_k}$  — все многогранники  $W_i$ , в ребрах которых лежит  $\varepsilon$ . Обозначим через  $\alpha_{i_j}$  двугранный угол в многограннике  $W_{i_j}$  при звене  $\varepsilon$ , тогда  $\sum_j \alpha_{i_j} = \pi$ , поэтому  $0 = \sum_j f(\alpha_{i_j}) - f(\pi) = \sum_j f(\alpha_{i_j})$ . Отсюда вытекает, что вклад звена  $\varepsilon$  в величину  $\sum_i f(W_i)$  равен

$$\sum_j |\varepsilon| f(\alpha_{i_j}) = |\varepsilon| \sum_j f(\alpha_{i_j}) = 0.$$

Если ввести такие же обозначения для ребра  $\varepsilon$  второго типа, то получим  $\sum_j \alpha_{i_j} = 2\pi$  и, из тех же самых соображений, его вклад в  $\sum_i f(W_i)$  равен нулю.

Осталось выяснить, какой вклад в величину  $\sum_i f(W_i)$  дают звенья из  $\mathcal{E}$ . Пусть  $\varepsilon$  — такое звено. Опять, в тех же самых обозначениях, имеем  $\sum_j \alpha_{i_j} = \alpha_\varepsilon$ , поэтому  $0 = \sum_j f(\alpha_{i_j}) - f(\alpha_\varepsilon)$ . Отсюда вытекает, что вклад звена  $\varepsilon$  в величину  $\sum_i f(W_i)$  равен

$$\sum_j |\varepsilon| f(\alpha_{i_j}) = |\varepsilon| \sum_j f(\alpha_{i_j}) = |\varepsilon| f(\alpha_\varepsilon),$$

т.е. он равен вкладу этого же звена в величину  $f(W)$ . Следовательно,  $f(W) = \sum_i f(W_i)$ .  $\square$

*Доказательство теоремы 8.13.* Так как  $A$  и  $B$  — равноставленные многогранники, их можно разрезать на многогранники  $A_1, \dots, A_n$  и  $B_1, \dots, B_n$  соответственно так, что  $A_i$  равен  $B_i$  при всех  $i = 1, \dots, n$ . Продолжим  $f$  до функции Дена для всех многогранников  $A_i$  (а, значит, и всех  $B_i$ ). Так как у равных многогранников инварианты Дена равны, имеем  $f(A_i) = f(B_i)$ . Кроме того, по предложению 8.26 имеем

$$f(A) = \sum_{i=1}^n f(A_i) = \sum_{i=1}^n f(B_i) = f(B).$$

$\square$

## 8.5 Решение Третьей проблемы Гильберта

Третья проблема Гильберта имеет дело с обобщением понятия равноставленности.

**Определение 8.27.** Многогранники  $A$  и  $B$  называются *равнодополняемыми*, если они имеют одинаковые объемы и существуют равноставленные многогранники  $W^A$  и  $W^B$ , которые можно так разрезать

на многогранники  $W_0^A, W_1^A, \dots, W_n^A$  и  $W_0^B, W_1^B, \dots, W_n^B$ , что многогранник  $W_0^A$  равен  $A$ , многогранник  $W_0^B$  равен  $B$ , а при всех  $i = 1, \dots, n$  многогранники  $W_i^A$  и  $W_i^B$  равны.

**Замечание 8.28.** Если многогранники  $A$  и  $B$  равноставлены, то они и равнодополняемы. Действительно, в качестве  $W^A$  и  $W^B$  можно взять их самих. Таким образом, равнодополняемость действительно является обобщением равноставленности.

**Следствие 8.29.** У равнодополняемых многогранников все инварианты Дена совпадают.

*Доказательство.* В обозначениях определения 8.27, пусть  $f$  — произвольная функция Дена для  $A$  и  $B$ , продолженная до функции Дена для всех  $W_i^A$  и  $W_j^B$ . Тогда  $f(A) = f(W_0^A)$ ,  $f(B) = f(W_0^B)$ , и  $f(W_i^A) = f(W_i^B)$  при всех  $i = 1, \dots, n$ . По предложению 8.26,  $f(W^A) = \sum_{i=0}^n f(W_i^A)$  и  $f(W^B) = \sum_{i=0}^n f(W_i^B)$ . Так как  $W^A$  и  $W^B$  равноставлены, то, по теореме 8.13, имеем  $f(W^A) = f(W^B)$ , откуда

$$\begin{aligned} f(A) &= f(W_0^A) = f(W^A) - \sum_{i=1}^n f(W_i^A) = \\ &= f(W^B) - \sum_{i=1}^n f(W_i^B) = f(W_0^B) = f(B). \end{aligned}$$

□

Из приведенных выше результатов мгновенно получаем следующее утверждение.

**Следствие 8.30.** Правильный тетраэдр не является равнодополняемым ни с кубом, ни с тетраэдром Хилла.

Третья проблема Гильберта спрашивала, существуют ли тетраэдры с равными основаниями и высотами, не являющиеся равнодополняемыми? Оказывается, ответ положительный.

**Определение 8.31.** Координатным тетраэдром назовем тетраэдр с вершинами  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  и  $(0, 0, 1)$ , а также каждый тетраэдр, ему подобный.

**Предложение 8.32.** У координатного тетраэдра имеется ненулевой инвариант Дена.

*Доказательство.* Обозначим через  $\alpha$  величину двугранных углов координатного тетраэдра при ребрах грани, являющейся правильным треугольником. Тогда, как легко видеть,  $\cos \alpha = 1/\sqrt{3}$ . Дословно повторяя рассуждения из доказательства леммы 8.17, можно показать, что при любом натуральном  $k$  имеем  $\cos(k\alpha) = a_k/(\sqrt{3})^k$ , где  $a_k$  — целое число, не делящееся на 3, откуда тем же способом заключаем, что число  $\frac{1}{\pi} \arccos(1/\sqrt{3})$  — иррационально. Отсюда вытекает, что множество  $\{\alpha, \pi/2, \pi\}$  не имеет зависимостей, в которые  $\alpha$  входит с ненулевым коэффициентом. Поэтому, положив  $f(\alpha) = 1$ ,  $f(\pi/2) = 0$  и  $f(\pi) = 0$ , мы получим функцию Дена для координатного тетраэдра. Легко видеть, что соответствующий ей инвариант Дена отличен от нуля.  $\square$

**Замечание 8.33.** Если в качестве основания координатного тетраэдра взять прямоугольный треугольник, то он будет отличаться от тетраэдра Хилла с таким же основанием лишь тем, что высота последнего падает не в вершину прямого угла основания, а в вершину острого. При этом высоты у таких тетраэдров будут равны.

**Следствие 8.34** (решение Третьей проблемы Гильберта). *Тетраэдр Хилла и координатный тетраэдр не являются равнодополняемыми.*

*Доказательство.* Пусть  $f$  — функция Дена, построенная в доказательстве предложения 8.32. Тогда ее значение на координатном тетраэдре отлично от нуля. Продолжим  $f$  до функции Дена для тетраэдра Хилла. По следствию 8.21, значение  $f$  на тетраэдре Хилла равно нулю. Поэтому, в силу следствия 8.29, рассматриваемые тетраэдры не являются равнодополняемыми.  $\square$

## 8.6 Дальнейшее развитие

В 1965 Сидлер [7] доказал, что равенство инвариантов Дена достаточно для равноставленности многогранников в  $\mathbb{R}^3$ . Тем самым имеет место следующая теорема.

**Теорема 8.35** (Ден–Сидлер). *Для равноставленности многогранников в  $\mathbb{R}^3$  необходимо и достаточно, чтобы совпадали их объемы и все инварианты Дена.*

**Замечание 8.36.** Теорему Дена–Сидлера на четырехмерный случай обобщили Б. Джессен (B. Jessen) и А. Торуп (A. Thorup), см. [9].

## Литература к главе 8

- [1] [http://en.wikipedia.org/wiki/Bolyai%E2%80%93Gerwien\\_theorem](http://en.wikipedia.org/wiki/Bolyai%E2%80%93Gerwien_theorem)
- [2] Dehn M. *Über den Rauminhalt*. Göttingen Nachr. Math. Phys., 1900, pp. 345–354; Math. Ann., 1902, v. 55, pp. 465–478.
- [3] Болтянский В.Г. *Третья проблема Гильберта*. М.:Наука, 1977.
- [4] Болтянский В.Г. *Равновеликие и равноставленные фигуры*. Гостехиздат, 1956.
- [5] Вербицкий М. Теория меры. <http://ium.mccme.ru/f10/teoriyamery.html>
- [6] Hadwiger H. *Zum Problem der Zerlegungsgleichheit  $k$ -dimensionaler Polyeder*. Math. Ann. 1954, 127, 170–174.
- [7] Sydler J.-P. *Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions*. Comment. math. Helv. 1965, v. 40, pp. 43–80.
- [8] <http://demonstrations.wolfram.com/DissectionOfHillsTetrahedronOfType1/>
- [9] Jessen B., Thorup A. *The Algebra of Polytopes in Affine Spaces*. Math. Scand., 1978, v. 43, pp. 211–240.

## Упражнения к главе 8

**Упражнение 8.1.** Пусть  $W$  — многоугольник, разрезанный двумя способами, а именно, на многоугольники  $F_1, \dots, F_n$ , а также на многоугольники  $G_1, \dots, G_m$ . Докажите следующее утверждение: многоугольник  $W$  можно разрезать на многоугольники  $W_i$  так, что каждый  $W_i$  лежит в некотором  $F_j$  и  $G_k$ . В частности, каждый  $F_j$  и  $G_k$  разрезается на некоторые из многоугольников  $W_i$ .

**Упражнение 8.2.** Выведите из упражнения 8.1, что из равноставленности многоугольников  $A$  и  $B$ , а также многоугольников  $B$  и  $C$ , вытекает равноставленность многоугольников  $A$  и  $C$ . Покажите, что отношение равноставленности на плоских многоугольниках является эквивалентностью.

**Упражнение 8.3.** Докажите, что любой плоский многоугольник можно разрезать на выпуклые многоугольники (а затем на треугольники).



**Упражнение 8.4.** Докажите, что любой треугольник равноставлен с некоторым параллелограммом.

**Упражнение 8.5.** Докажите, что два параллелограмма, у которых соответственно одинаковы основания и проведенные к ним высоты, равноставлены.

**Упражнение 8.6.** Из упражнения 8.5 выведите, что любые два прямоугольника равных площадей равноставлены.

**Упражнение 8.7.** Докажите, что конечный набор прямоугольников равноставлен с любым прямоугольником суммарной площади.

**Упражнение 8.8.** Докажите теорему Бойяи–Валласа–Гервина.

**Упражнение 8.9.** Выведите из теоремы Бойяи–Валласа–Гервина, что любая прямоугольная призма равноставлена с прямоугольным параллелепипедом, а последний равноставлен с кубом.

**Определение 8.37.** Пусть  $W$  — многогранник с множеством ребер  $E$ , и  $M$  — некоторое множество вещественных чисел, содержащее длины всех ребер из  $E$ . Пусть  $f$  — произвольная функция Дена для  $W$ , и  $g: M \rightarrow \mathbb{R}$  — произвольная аддитивная функция. Тогда *обобщенным инвариантом Дена многогранника  $W$* , соответствующим паре  $(f, g)$ , назовем число  $\sum_{e \in E} g(|e|)f(\alpha_e)$ , где  $|e|$  и  $\alpha_e$  — длина ребра  $e$  и величина двугранного угла при этом ребре соответственно.

**Упражнение 8.10.** Докажите, что у равноставленных многогранников обобщенные инварианты Дена равны.

**Упражнение 8.11.** Докажите, не пользуясь иррациональностью конкретных чисел, что среди правильных пирамид (основание — правильный многоугольник, а высота попадает в центр основания) имеются неравноставленные с равновеликим кубом.

## Глава 9

# Кратчайшие кривые и геодезические

**План.** Геометрические оптимизационные задачи, конфигурационное пространство, целевая функция или вариационный функционал, оптимальные или экстремальные объекты, кратчайшие кривые, кратчайшие в евклидовом пространстве, ломаная, вписанная в кривую, длина ломаной в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , длина кривой в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , функция расстояния, норма, расстояние, соответствующее норме, евклидово расстояние, кратчайшие в нормированном пространстве, манхэттенское пространство, кратчайшие в манхэттенском пространстве, правильные сферические ломаные, кратчайшие на сфере, кратчайшие на многогранниках, гладкие кривые, вектор скорости гладкой кривой, интегральная формула длины пространственной кривой, геодезические, замкнутые геодезические.

В этой главе мы поговорим о *геометрических оптимизационных задачах*. Общая идея — рассматривается какой-нибудь класс геометрических объектов, обычно называемый *конфигурационным пространством*; каждому объекту приписывается величина, измеряющая степень “совершенства” этого объекта, т.е. сколь хорошо объект подходит в качестве решения той или иной задачи (это соответствие является функцией на конфигурационном пространстве, которая называется обычно *целевой функцией* или *вариационным функционалом*); изучается, какие наименьшие, или наибольшие, или, более общо, критические значения может принимать вариационный функционал и на каких объектах, называемых *оптимальными* или *экстремальными*, эти значения достигаются.

## 9.1 Кратчайшие кривые

В качестве первой оптимизационной задачи, рассмотрим проблему поиска кратчайшего пути. Итак, нам дано некоторое пространство  $\mathcal{S}$ , и в нем — пара точек  $P$  и  $Q$ . В пространстве  $\mathcal{S}$  мы можем проводить кривые и измерять их длины. В качестве конфигурационного пространства рассмотрим какой-нибудь класс кривых, соединяющих  $P$  и  $Q$ , а в качестве вариационного функционала — функцию длины таких кривых. Задача в том, чтобы найти наименьшее значение этого функционала и описать те кривые, на которых это наименьшее значение достигается. Такие кривые называются *кратчайшими*.

Решение этой проблемы существенно зависит от того, где мы ищем кратчайшие пути, т.е. от выбора пространства  $\mathcal{S}$ . Посмотрим некоторые примеры.

### 9.1.1 Евклидово пространство

Пусть  $\mathcal{S}$  — пространство  $\mathbb{R}^n$  со стандартной функцией расстояния и все кривые — непрерывны.

**Определение 9.1.** Будем говорить, что ломаная  $L$  вписана в кривую  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , если существует такое разбиение  $\xi = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_m = b\}$  отрезка  $[a, b]$ , что  $L = \gamma(t_0)\gamma(t_1) \cdots \gamma(t_m)$ . Иногда, чтобы подчеркнуть связь между  $L$  и  $\xi$ , мы будем писать  $L = L_\xi$ .

**Определение 9.2.** Длиной  $|L|$  ломаной  $L = A_0 \cdots A_m$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$  называется сумма длин всех ее ребер:  $|L| = \sum_{i=1}^m |A_{i-1}A_i|$ .

**Определение 9.3.** Длиной  $|\gamma|$  кривой  $\gamma$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$  называется точная верхняя грань длин всех вписанных в кривую ломаных.

**Замечание 9.4.** Обратим особое внимание, что существуют кривые, длина которых равна бесконечности. Например, пусть  $f(t)$  — функция на отрезке  $[0, 1]$  такая, что  $f(0) = 0$ , а при  $t > 0$  имеем  $f(t) = t \sin(1/t)$ . Тогда кривая  $\gamma(t) = (t, f(t))$ ,  $t \in [0, 1]$ , имеет бесконечную длину (проверьте).

Рассмотрим теперь следующую оптимизационную задачу.

**Задача 9.5.** Выберем произвольные точки  $P$  и  $Q$  из  $\mathcal{S} = \mathbb{R}^n$ . Требуется найти точную нижнюю грань величины  $|\gamma|$  по всем непрерывным кривым  $\gamma$ , соединяющим  $P$  и  $Q$ , и определить, на какой кривой эта величина достигается, если, конечно, такая кривая существует.

Чтобы решить поставленную задачу, мы начнем со следующей простой леммы.

**Лемма 9.6.** *Длина  $|L|$  ломаной  $L = A_0 \dots A_m$  не меньше расстояния между ее концами, т.е.  $|L| \geq |A_0 A_m|$ . Более того, если  $|L| = |A_0 A_m|$ , то  $A_0, A_1, \dots, A_m$  — последовательные точки отрезка  $[A_0, A_m]$ .*

*Доказательство.* Действительно, по неравенству треугольника, имеем

$$(9.1) \quad |L| = |A_0 A_1| + |A_1 A_2| + |A_2 A_3| + \dots + |A_{m-1} A_m| \geq \\ \geq |A_0 A_2| + |A_2 A_3| + \dots + |A_{m-1} A_m| \geq |A_0 A_3| + \dots + |A_{m-1} A_m| \geq \dots \\ \dots \geq |A_0 A_m|.$$

При этом, равенство  $|L| = |A_0 A_m|$  имеет место тогда и только тогда, когда все неравенства в формуле (9.1) превращаются в равенства. Однако, последнее имеет место в точности тогда, когда каждая последующая точка  $A_i$ ,  $i \geq 2$ , лежит на продолжении отрезка  $A_0 A_{i-1}$  за вершину  $A_{i-1}$ .  $\square$

**Следствие 9.7.** *Длина непрерывной кривой не меньше расстояния между ее концами, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда образ кривой — отрезок, а координатные функции монотонны.*

*Доказательство.* Пусть  $\gamma$  — непрерывная кривая, соединяющая точки  $P$  и  $Q$ , и пусть  $L = A_0 \dots A_m$ ,  $P = A_0$ ,  $Q = A_m$ , — произвольная ломаная, вписанная в  $\gamma$ . Тогда, по определению длины кривой,  $|\gamma| \geq |L|$  и, значит, по лемме 9.6, имеем  $|\gamma| \geq |PQ|$ . По той же лемме, равенство имеет место тогда и только тогда, когда для любой такой ломаной  $L$  ее вершины являются последовательными точками отрезка  $[P, Q]$ , а это и означает, что образ отображения  $\gamma$  — прямолинейный отрезок, а координатные функции — монотонны.  $\square$

Из следствия 9.7 мгновенно получаем следующий результат.

**Следствие 9.8.** *Для любых двух точек  $P$  и  $Q$  пространства  $\mathbb{R}^n$  существует соединяющая их кратчайшая кривая, и каждая такая кривая задает монотонное движение по отрезку  $[P, Q]$ . Таким образом, с точностью до параметризации, точки  $P$  и  $Q$  соединяются единственной кратчайшей кривой, и эта кривая — отрезок  $[P, Q]$ .*

**Замечание 9.9.** Легко модифицировать предыдущий пример так, чтобы в полученном пространстве  $\mathcal{S}$  кратчайшая кривая существовала не для любой пары точек. Для этого можно, скажем, выкинуть из  $\mathbb{R}^n$  произвольную точку  $A$ , тогда точки  $P$  и  $Q$ , для которых  $A \in (P, Q)$ , кратчайшей непрерывной кривой соединить нельзя: ведь у каждой такой кривой будет точка, лежащая вне отрезка  $[P, Q]$ , поэтому ее длина будет больше  $|PQ|$ . Осталось заметить, что  $|PQ|$  — это точная нижняя грань длин всех непрерывных кривых на  $\mathbb{R}^n \setminus \{A\}$ , соединяющих  $P$  и  $Q$ .

### 9.1.2 Нормированное пространство

Кроме стандартной функции расстояния на  $\mathbb{R}^n$ , имеется и еще много других. Начнем с общего определения расстояния на произвольном множестве  $X$ .

**Определение 9.10.** *Функцией расстояния* или *метрикой* на произвольном множестве  $X$  называется функция  $\rho(x, y)$ , заданная на парах элементов  $x$  и  $y$  из  $X$ , которая

- (1) *положительно определена*, т.е.  $\rho(x, y) \geq 0$  для любых точек  $x$  и  $y$  из  $X$ , причем  $\rho(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = y$ ;
- (2) *симметрична*, т.е.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  для любых  $x, y \in X$ ;
- (3) *удовлетворяет неравенству треугольника*, т.е.  $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$  для любых  $x, y, z \in X$ .

Множество  $X$ , на котором задана функция расстояния, называется *метрическим пространством*.

Один из естественных способов определения расстояния на  $\mathbb{R}^n$  описывается в терминах нормы.

**Определение 9.11.** *Нормой* на пространстве  $\mathbb{R}^n$  называется такая функция  $\|x\|$  на векторах  $x \in \mathbb{R}^n$ , которая

- (1) *положительно определена*, т.е.  $\|x\| \geq 0$  для любого вектора  $x$ , причем  $\|x\| = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = 0$ ;
- (2) *положительно-однородна*, т.е.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  для любого вектора  $x$  и числа  $\lambda$ ;
- (3) *субаддитивна*, т.е.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  для любых векторов  $x$  и  $y$ .

Пространство  $\mathbb{R}^n$ , на котором задана норма, называется *нормированным*.

Рассмотрим функцию  $\rho(x, y) = \|xy\| = \|x - y\|$  на парах точек из  $\mathbb{R}^n$ , где  $\|\cdot\|$  — некоторая заданная норма. Из свойств нормы легко вытекает, что  $\rho$  — функция расстояния (проверьте).

**Определение 9.12.** *Расстояние на  $\mathbb{R}^n$ , соответствующее норме  $\|\cdot\|$ , — это функция  $\rho(x, y) = \|xy\| = \|x - y\|$ .*

**Пример 9.13.** Положим  $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ , тогда так определенная норма называется *евклидовой* и задает стандартное евклидово расстояние.

Пусть  $\mathcal{S}$  — нормированное пространство  $\mathbb{R}^n$  с функцией расстояния, соответствующей норме  $\|\cdot\|$ ; все кривые — непрерывны; длина  $\|L\|$  ломаной  $L = A_0 \dots A_m$  равна  $\sum_{i=1}^m \|A_{i-1}A_i\|$ ; длина  $\|\gamma\|$  непрерывной кривой  $\gamma$  снова определяется как точная верхняя грань длин вписанных в кривую ломаных. Выберем произвольные точки  $P$  и  $Q$  из  $\mathcal{S}$ .

Следующий результат получается аналогично следствию 9.8.

**Следствие 9.14.** *Для любых двух точек  $P$  и  $Q$  нормированного пространства  $\mathbb{R}^n$  монотонно параметризованный отрезок  $[P, Q]$  является кратчайшей кривой, соединяющей  $P$  и  $Q$ .*

**Замечание 9.15.** Однако теперь кратчайшая кривая не обязана быть единственной с точностью до параметризации. Ниже мы рассмотрим соответствующие примеры.

### 9.1.3 Манхеттенское пространство

**Определение 9.16.** *Манхеттенской нормой на  $\mathbb{R}^n$  называется функция  $\|(x^1, \dots, x^n)\| = \sum_{i=1}^n |x^i|$ . Соответствующее расстояние  $\rho$  и нормированное пространство также называются *манхеттенскими*.*

**Замечание 9.17.** Название нормы и расстояния происходит от названия одного из районов в Нью-Йорке, где основные улицы — стриты и авеню — образуют прямоугольную сетку (основным исключением является Бродвей, пересекающий эту сетку наискосок). Если пешеход двигается по этой сетке дорог, не возвращаясь на уже пройденные стриты и авеню, то он проходит путь, длина которого равна введенному только что расстоянию между концами этого пути.

Из следствия 9.14 вытекает, что каждый отрезок в пространстве с манхеттенской метрикой является кратчайшей кривой. Есть ли другие кратчайшие кривые, образы которых не являются отрезками? Ответ положительный.

**Пример 9.18.** На манхеттенской плоскости  $\mathbb{R}^2$  рассмотрим точки  $P = (0, 0)$  и  $Q = (1, 1)$ . Пусть  $R = (1, 0)$ . Тогда отрезок  $[P, Q]$  имеет ту же манхеттенскую длину, что и ломаная  $PRQ$ .

Следующее предложение полностью описывает кратчайшие кривые в манхеттенском пространстве.

**Предложение 9.19.** Пусть  $\gamma = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$  — непрерывная кривая в пространстве с манхеттенской метрикой, соединяющая точки  $P$  и  $Q$ . Тогда  $\gamma$  кратчайшая, если и только если все функции  $\gamma^i(t)$  — монотонные.

*Доказательство.* Пусть  $L = A_0 \cdots A_m$ ,  $P = A_0$ ,  $Q = A_m$ , — произвольная ломаная, вписанная в  $\gamma$ . Для каждой точки  $A \in \mathbb{R}^n$  через  $(A^1, \dots, A^n)$  будем обозначать ее координаты. Тогда  $L^i = A_0^i \cdots A_m^i$  — ломаная в одномерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}$ , вписанная в кривую  $\gamma^i(t)$ , которая соединяет точки  $P^i$  и  $Q^i$ . Заметим, что, по определению,  $\|L\| = \sum_{i=1}^n |L^i|$ , где  $|L^i|$  — евклидова длина ломаной  $L^i$ , поэтому  $\|\gamma\| = \sum_{i=1}^n |\gamma^i|$ . Следовательно, кривая  $\gamma$  — кратчайшая, если и только если все кривые  $\gamma^i$  — кратчайшие. По следствию 9.7, кривая  $\gamma^i$  — кратчайшая тогда и только тогда, когда она является монотонной функцией. Это замечание и завершает доказательство.  $\square$

**Замечание 9.20.** Из предложения 9.19 вытекает следующее наблюдение (кривые рассматриваются с точностью до параметризации): если для двух разных  $i$  имеем  $P^i \neq Q^i$ , то точки  $P$  и  $Q$  в манхеттенском пространстве соединяются бесконечным числом кратчайших кривых; в противном случае кратчайшая кривая определена однозначно.

### 9.1.4 Сфера

Выберем теперь в качестве  $\mathcal{S}$  произвольную сферу  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  с центром в  $O$  и радиусом 1. Наша задача — выяснить, как устроены кратчайшие кривые на  $S^2$ .

**Теорема 9.21.** Пусть  $P$  и  $Q$  — произвольные точки на  $S^2$ , тогда кратчайшие кривые на  $S^2$ , соединяющие  $P$  и  $Q$  — это, в точности, все малые сферические отрезки.

Прежде чем доказывать теорему, обсудим некоторые необходимые нам результаты из сферической геометрии.

Пусть  $A_0, \dots, A_n$  — некоторая последовательность различных точек сферы  $S^2$ . Тогда  $A_i$  можно рассматривать как вершины обычной, евклидовой, ломаной  $L$ , соединив последовательные  $A_i$  отрезками. Также можно построить сферическую ломаную  $\Lambda$ , соединив последовательные  $A_i$  сферическими отрезками.

**Определение 9.22.** Сферическую ломаную, все ребра которой — малые сферические отрезки, будем называть *правильной*. Ломаную  $L$  и правильную сферическую ломаную  $\Lambda$  с одной и той же последовательностью вершин будем называть *соответствующими* друг другу.

**Лемма 9.23.** Пусть  $L$  и  $\Lambda$  — соответствующие друг другу евклидова и правильная сферическая ломаные, а  $|L|$  и  $|\Lambda|$  — их длины. Тогда

$$|L| \leq |\Lambda| \leq \frac{\pi}{2} |L|.$$

*Доказательство.* Первое неравенство вытекает из того, что хорда всегда короче дуги, которую она стягивает. Докажем теперь второе неравенство.

Обозначим через  $\ell_i$  длину  $i$ -ого ребра ломаной  $L$ ; через  $\varphi_i$  — длину  $i$ -ого ребра правильной сферической ломаной  $\Lambda$ . Тогда  $\varphi_i/\ell_i = \varphi_i/(2 \sin \frac{\varphi_i}{2})$ . Функция  $f(x) = x/\sin x$  монотонно возрастает на  $(0, \pi/2]$ , поэтому ее максимум равен  $\pi/2$  и, значит,  $\varphi_i/\ell_i \leq \pi/2$ , откуда и вытекает заключение леммы.  $\square$

**Лемма 9.24.** Пусть  $\gamma$  — непрерывная кривая конечной длины на сфере  $S^2$ , тогда ее длина равна точной верхней грани длин правильных сферических ломаных, вписанных в  $\gamma$ .

*Доказательство.* Пусть кривая  $\gamma$  параметризована отрезком  $[a, b]$ , и  $\xi = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$  — какое-нибудь разбиение этого отрезка. Положим  $A_i = \gamma(t_i)$ , и пусть  $\Lambda_\xi$  — вписанная в  $\gamma$  правильная сферическая ломаная с вершинами  $A_i$ . Заметим, что сферическое неравенство треугольника (следствие 6.53) обобщается и на треугольники, составленные из малых сферических отрезков и содержащие диаметрально противоположные вершины, только теперь неравенство становится нестрогим. Таким образом, для всякого подразбиения  $\xi' \supset \xi$  отрезка  $[a, b]$  имеем  $|\Lambda_{\xi'}| \geq |\Lambda_\xi|$ .

Так как  $\gamma$  — непрерывное отображение отрезка, оно является равномерно непрерывным, т.е. для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что для любых  $a \leq t \leq t' \leq b$ ,  $t' - t < \delta$ , имеем  $|\gamma(t)\gamma(t')| < \varepsilon$ . Отсюда



и из леммы 9.23 вытекает, что для любого  $\varepsilon > 0$  и любой правильной сферической ломаной  $\Lambda$ , вписанной в  $\gamma$ , существует такая правильная сферическая ломаная  $\Lambda'$ , также вписанная в  $\gamma$ , для которой  $|\Lambda'| \geq |\Lambda|$  и длины всех ребер  $\Lambda'$  меньше  $\varepsilon$ . Следовательно, для любого  $\varepsilon > 0$  точная верхняя грань длин правильных сферических ломаных, вписанных в  $\gamma$ , равна точной верхней грани длин таких ломаных при условии, что рассматриваются только ломаные с ребрами, длина которых меньше  $\varepsilon$ .

Пусть  $L$  и  $\Lambda$  — соответствующие друг другу вписанные в  $\gamma$  евклидова и правильная сферическая ломаные, причем все ребра ломаной  $\Lambda$  короче  $\varepsilon$ . По определению длины непрерывной кривой, имеем  $|L| \leq |\gamma|$ . По лемме 9.23,  $|\Lambda| \leq \frac{\pi}{2}|L| \leq \frac{\pi}{2}|\gamma|$ .

Воспользуемся обозначениями из леммы 9.23. Тогда  $|L| = \sum_i l_i$ ,  $|\Lambda| = \sum_i \varphi_i$ . Применяя формулу Тейлора, получим  $\varphi_i - l_i = O(\varphi_i^3) \leq C\varphi_i^3$ , где положительную постоянную  $C$  можно выбрать не зависящей от  $i$  (т.е. рассмотреть формулу Тейлора на всем отрезке  $[0, \pi/2]$ ). Поэтому

$$0 < |\Lambda| - |L| \leq \sum_i \varphi_i - \sum_i l_i \leq C \sum_i \varphi_i^3 \leq C\varepsilon^2 \sum_i \varphi_i \leq C\varepsilon^2 \frac{\pi}{2} |\gamma|.$$

Так как длина  $|\gamma|$  кривой  $\gamma$  конечна по предположению, то  $|\Lambda| - |L| \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , что и завершает доказательство леммы.  $\square$

Практически дословно воспроизводя доказательство леммы 9.6, получаем следующий результат.

**Лемма 9.25.** *Длина малого сферического отрезка, соединяющего концы правильной сферической ломаной  $\Lambda$ , меньше или равна длине  $|\Lambda|$  этой ломаной. Более того, если имеет место равенство, то вершины  $\Lambda$  являются последовательными точками на малом сферическом отрезке, соединяющем концы  $\Lambda$ .*

**Следствие 9.26.** *Для любых точек  $P$  и  $Q$  сферы  $S^2$  существует соединяющая их кратчайшая кривая на  $S^2$ , и каждая такая кривая, с точностью по параметризации, является малым сферическим отрезком. Таким образом, если  $P$  и  $Q$  не являются диаметрально противоположными, то они соединяются единственной кратчайшей кривой, а если диаметрально противоположны, то таких кривых бесконечно много.*

*Доказательство.* Рассмотрим произвольную непрерывную кривую  $\gamma$ , соединяющую  $P$  и  $Q$  и имеющую конечную длину (такие кривые есть, например малый сферический отрезок). Из леммы 9.24 вытекает, что

длина  $|\gamma|$  кривой  $\gamma$  не меньше длины любой вписанной в  $\gamma$  правильной сферической ломаной  $\Lambda$ . Из леммы 9.25 следует, что длина  $|\Lambda|$  ломаной  $\Lambda$  не меньше длины каждого малого сферического отрезка, соединяющего концы  $\gamma$ . Таким образом, малый сферический отрезок, соединяющий  $P$  и  $Q$ , действительно является кратчайшей кривой на сфере  $S^2$ .

Покажем, что других кратчайших кривых, кроме малых сферических отрезков, на сфере нет. Пусть  $\gamma$  — отличная от каждого малого сферического отрезка кратчайшая кривая, соединяющая  $P$  и  $Q$ . Тогда на кривой  $\gamma$  существуют такие точки  $R$  и  $T$ , что правильная сферическая ломаная  $\Lambda = PRTQ$  вписана в  $\gamma$  и отлична от каждого малого сферического отрезка  $I$ , соединяющего  $P$  и  $Q$ . По лемме 9.25,  $\Lambda$  длиннее  $I$ . По лемме 9.24, кривая  $\gamma$  не короче  $|\Lambda|$ , тем самым  $\gamma$  длиннее  $I$ , противоречие.  $\square$

### 9.1.5 Многогранники

Выберем в качестве  $\mathcal{S}$  границу  $\mathcal{F} = \partial W$  многогранника  $W$ . Наша задача — описать свойства кривых на  $\mathcal{F}$ , соединяющих заданные точки  $P$  и  $Q$  и имеющих наименьшую длину среди всех таких кривых.

Начнем с простого наблюдения.

**Предложение 9.27.** *Если отрезок  $[P, Q]$  лежит в  $\mathcal{F}$ , то кратчайшей кривой на  $\mathcal{F}$ , соединяющей  $P$  и  $Q$ , является этот отрезок. Более того, для таких  $P$  и  $Q$  кратчайшая кривая единственна.*

*Доказательство.* Действительно, в силу следствия 9.8, отрезок  $[P, Q]$  является единственной кратчайшей кривой в  $\mathbb{R}^3$ , соединяющей  $P$  и  $Q$ , поэтому любая другая кривая на  $\mathcal{F}$  с концами в  $P$  и  $Q$  длиннее отрезка  $[P, Q]$ .  $\square$

Посмотрим теперь, как устроены кратчайшие кривые на  $\mathcal{F}$  локально, т.е. в маленьких окрестностях своих точек.

**Предложение 9.28.** *Пусть  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{F}$  — кратчайшая кривая на  $\mathcal{F}$ , пересекающая некоторое ребро  $e$  многогранника  $W$  во внутренней точке  $R = \gamma(t_0)$  ребра  $e$ , причем  $t_0 \in (a, b)$ . Пусть  $e$  — общее ребро граней  $F_1$  и  $F_2$ . Тогда существует  $\delta > 0$  такое, что*

$$(1) [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset (a, b);$$

(2) ограничения  $\gamma$  на отрезки  $[t_0 - \delta, t_0]$  и  $[t_0, t_0 + \delta]$  представляют собой отрезки, один из которых лежит в  $F_1$ , другой — в  $F_2$ ;

- (3) *угол между одним из этих отрезков и лучом, выпущенным из  $R$  в одном из двух направлений ребра  $e$ , равен углу между вторым отрезком и лучом, выпущенным в противоположном направлении (в дальнейшем это свойство будем условно называть “угол падения равен углу преломления”).*

*Доказательство.* Рассмотрим шаровую окрестность  $U_\varepsilon(R)$  точки  $R$  радиуса  $\varepsilon$  меньшего, чем расстояние от  $R$  до всех не содержащих  $R$  ребер и граней  $W$ . Из непрерывности  $\gamma$  вытекает, что существует такое  $\delta > 0$ ,  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset (a, b)$ , для которого  $\gamma$  переводит  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  в  $U_\varepsilon(R)$ .

Шар  $U_\varepsilon(R)$  пересекает  $\mathcal{F}$  по двум полукругам, один из которых лежит в  $F_1$ , а другой — в  $F_2$ . Полукруг, лежащий в  $F_i$ , обозначим через  $U_i$ . Используя подходящие движения пространства  $\mathbb{R}^3$ , расположим круги  $U_i$  в одной плоскости  $\pi$  так, чтобы они пересекались по диаметру. Такое расположение кругов  $U_i$  в плоскости  $\pi$  назовем *локальной разверткой* в окрестности точки  $R$ . Ясно, что длина любой кривой на  $\mathcal{F}$ , лежащей в  $U_\varepsilon(R)$ , равна длине ее изображения на развертке. Так как каждый фрагмент кратчайшей кривой укоротить нельзя, этот фрагмент также является кратчайшей кривой, поэтому ограничение  $\gamma$  на  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ , изображенное на развертке, представляет собой отрезок, а рассмотренное на  $\mathcal{F}$  — два отрезка  $[\gamma(t_0 - \delta), R]$  и  $[R, \gamma(t_0 + \delta)]$ , причем один лежит в  $U_1 \subset F_1$ , а другой — в  $U_2 \subset F_2$ . Кроме того, так как на локальной развертке рассматриваемый фрагмент-отрезок образует с диаметром — образом части ребра  $e$  — равные вертикальные углы, выполняется свойство “угол падения равен углу преломления”.  $\square$

Наконец, разберемся, как выглядит кратчайшая кривая в окрестности ее точки, совпадающей с вершиной многогранника.

**Конструкция 9.29.** Пусть  $v$  — произвольная вершина многогранника  $W$ , а  $F_1, \dots, F_k$  — все его грани, содержащие  $v$  и упорядоченные в соответствии с одним из обходов вокруг вершины  $v$ . Для удобства изложения, положим  $F_{k+i} = F_i$  при каждом целом  $i$ , и обозначим через  $e_i$  ребро многогранника  $W$ , выходящее из  $v$  и являющееся общим для граней  $F_{i-1}$  и  $F_i$ . Отметим, что ребра  $e_i$  и  $e_{i+1}$  принадлежат грани  $F_i$ . Угол многоугольника  $F_i$  при вершине  $v$ , т.е. между сторонами  $e_i$  и  $e_{i+1}$ , обозначим через  $\alpha_i$ , см. рис. 9.1.

Выберем в гранях  $F_p$  и  $F_q$  произвольные точки  $x_p$  и  $x_q$ , отличные от  $v$ . Обозначим через  $\alpha_{p,m}$ ,  $m \in \{p, p+1\}$ , угол при вершине  $v$  между отрезками  $e_m$  и  $[v, x_p]$ ; аналогично, обозначим через  $\alpha_{q,m}$ ,  $m \in \{q, q+1\}$ , угол при вершине  $v$  между отрезками  $e_m$  и  $[v, x_q]$ . Отметим, что некоторые из этих углов могут вырождаться, т.е. быть равными нулю.

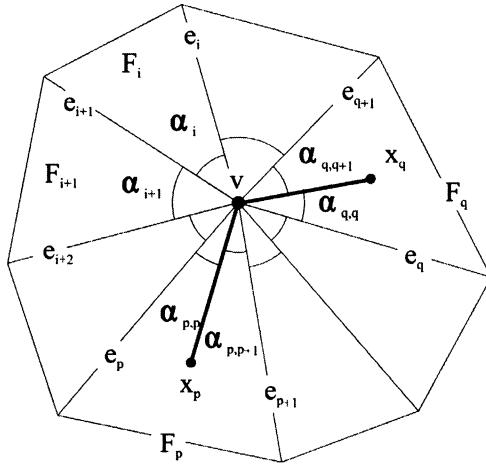


Рис. 9.1: Угол между отрезками, выходящими из вершины многогранника

Пусть  $B_\varepsilon(v)$  — замкнутый шар с центром в  $v$  радиуса  $\varepsilon$ , выбранного меньшим расстояния от  $v$  до всех вершин, ребер и граней многогранника  $W$ , не содержащих  $v$ , а также до точек  $x_p$  и  $x_q$ . Тогда отрезки  $[v, x_p]$  и  $[v, x_q]$  разбивают  $B_\varepsilon(v) \cap \mathcal{F}$  на две компоненты  $K_1$  и  $K_2$  (по аналогии с тем, как два радиуса разбивают круг). Каждая из этих компонент представляет собой объединение секторов.

**Определение 9.30.** В сделанных выше обозначениях, сумма величин углов секторов, составляющих компоненту  $K_i$ , называется *углом между  $[v, x_p]$  и  $[v, x_q]$  на границе  $\mathcal{F}$  многогранника  $W$* .

Таким образом, если отрезки  $[v, x_p]$  и  $[v, x_q]$  различны, то они определяют два угла.

Имеет место следующий очевидный результат.

**Лемма 9.31.** В сделанных выше обозначениях, углы на поверхности  $\mathcal{F}$  многогранника  $W$  между отрезками  $[v, x_p]$  и  $[v, x_q]$  равны

$$\alpha_{p,p+1} + \sum_{i=p+1}^{q-1} \alpha_i + \alpha_{q,q} \quad \text{и} \quad \alpha_{q,q+1} + \sum_{i=q+1}^{p-1} \alpha_i + \alpha_{p,p}.$$

**Предложение 9.32.** Пусть  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  — кратчайшая кривая на границе  $\mathcal{F}$  многогранника  $W$ . Предположим, что для некоторого  $t_0 \in (a, b)$  точка  $\gamma(t_0)$  является вершиной многогранника  $W$ . Выберем настолько маленькое  $\delta$ , чтобы  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset (a, b)$  и ограничения  $\gamma$  на отрезки  $[t_0 - \delta, t_0]$  и  $[t_0, t_0 + \delta]$  лежали в некоторых гранях многогранника  $W$  и, значит, являлись бы отрезками. Тогда каждый из двух углов на многограннике  $W$  между этими отрезками больше или равен  $\pi$ , в частности, кривизна  $K(v)$  в такой вершине  $v$  неположительна.

*Доказательство.* Пусть это не так, тогда угол, составленный из секторов  $S_i$  одной из компонент  $K_j$ , скажем  $K_1$ , меньше  $\pi$ . С помощью подходящих движений выложим секторы  $S_i$  на плоскости так, чтобы соседние секторы пересекались по радиусу (аналог локальной развертки). Тогда объединение этих секторов — сектор величины меньше  $\pi$ , заключенный между образами частей  $[O', A]$  и  $[O', B]$  отрезков  $[\gamma(t_0 - \delta), \gamma(t_0)]$  и  $[\gamma(t_0), \gamma(t_0 + \delta)]$ , где  $O'$  — центр полученного “большого” сектора. Но тогда длина хорды  $[A, B]$  этого сектора меньше, чем  $|O'A| + |O'B|$ , поэтому, заменяя в  $\gamma$  прообразы отрезков  $[O', A]$  и  $[O', B]$  на прообраз сектора  $[A, B]$ , мы укоротим  $\gamma$ , противоречие.  $\square$

**Следствие 9.33.** На выпуклом многограннике кратчайшие кривые не проходят через вершины.

## 9.1.6 Интегральная формула длины пространственной кривой

**Определение 9.34.** Кривая  $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  в  $\mathbb{R}^n$  называется *гладкой*, если функции  $x_i(t)$  дифференцируемы бесконечное число раз.

**Замечание 9.35.** Часто гладкость понимают в более слабом смысле, требуя, чтобы функции были дифференцируемы столько раз, сколько достаточно для решения конкретной задачи.

**Определение 9.36.** Вектором скорости  $\dot{\gamma}(t)$  гладкой кривой

$$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

вычисленным в точке  $t$ , называется вектор  $(\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t))$ , составленный из производных координатных функций  $x_i(t)$ .

Заметим, что длина  $\|\dot{\gamma}(t)\|$  вектора скорости в евклидовом пространстве, по определению, равна  $\sqrt{\sum_{i=1}^n \dot{x}_i^2(t)}$ , поэтому  $\|\dot{\gamma}(t)\|$  явля-

ется непрерывной функцией и, значит, для нее определен интеграл  $\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$ .

**Теорема 9.37.** Пусть  $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$  — гладкая кривая, тогда ее длина может быть вычислена по формуле

$$|\gamma| = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Эта теорема доказывается в курсе математического анализа. Мы же будем заниматься различными ее применениями.

**Пример 9.38.** Проверим теорему 9.37 на примерах некоторых известных кривых.

- Пусть  $\gamma(t) = P + (Q - P)t$ ,  $t \in [0, 1]$ , — кривая, задающая отрезок  $[P, Q]$ . Тогда  $\dot{\gamma}(t) = Q - P$  и  $|\gamma| = \int_0^1 \|Q - P\| dt = \|Q - P\|$ .
- Пусть  $\gamma(t) = (O_1, O_2) + r(\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , — кривая, задающая окружность с центром в  $(O_1, O_2)$  и радиусом  $r$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Тогда  $\dot{\gamma}(t) = r(-\sin t, \cos t)$ , откуда  $|\gamma| = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r$ .

### 9.1.7 Прямой круговой цилиндр

Пусть  $x, y, z$  — декартовы координаты в  $\mathbb{R}^3$ . Рассмотрим прямую  $\ell(z) = (1, 0, 0) + z(0, 0, 1)$ ,  $z \in \mathbb{R}$ , и пусть  $C$  обозначает цилиндр, полученный вращением этой прямой вокруг оси  $z$ . Обозначая через  $\varphi$  угол поворота, найдем, что точки цилиндра  $C$  могут быть заданы в виде  $(\cos \varphi, \sin \varphi, z)$ . Это представление определяет отображение  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(\varphi, z) = (\cos \varphi, \sin \varphi, z)$ .

**Лемма 9.39.** Пусть  $\delta(t) = (\varphi(t), z(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , — гладкая кривая на декартовой плоскости с координатами  $\varphi, z$ , и

$$\gamma(t) = f(\delta(t)) = (\cos \varphi(t), \sin \varphi(t), z(t))$$

— соответствующая кривая на цилиндре  $C$ . Тогда длины этих кривых одинаковы.

*Доказательство.* Используем теорему 9.37. С одной стороны,

$$|\delta| = \int_a^b \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt.$$

С другой стороны,  $\dot{\gamma}(t) = (-\sin \varphi(t) \dot{\varphi}(t), \cos \varphi(t) \dot{\varphi}(t), \dot{z}(t))$ , поэтому

$$\begin{aligned} |\dot{\gamma}| &= \int_a^b \sqrt{\sin^2 \varphi(t) \dot{\varphi}^2(t) + \cos^2 \varphi(t) \dot{\varphi}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt = \\ &= \int_a^b \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt, \end{aligned}$$

что и требовалось.  $\square$

**Замечание 9.40.** Лемма 9.39 интуитивно очевидна, если представить плоскость в виде “бесконечного” листа бумаги, который мы с помощью отображения  $f$  наматываем на цилиндр. При этом, естественно, длины кривых сохраняются, если представлять кривые как нити, приклеенные к листу бумаги.

**Следствие 9.41.** Пусть  $\delta(t) = (\varphi(t), z(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , — гладкая кривая на декартовой плоскости с координатами  $\varphi$ ,  $z$ ,  $u$

$$\gamma(t) = f(\delta(t)) = (\cos \varphi(t), \sin \varphi(t), z(t))$$

— соответствующая кривая на цилиндре  $\mathcal{C}$ . Предположим, что  $\gamma$  — кратчайшая кривая. Тогда  $\delta$  — отрезок (точнее, монотонная параметризация отрезка).

*Доказательство.* Если это не так, то существует кривая  $\bar{\delta}(t)$ , соединяющая концы кривой  $\delta$  и такая, что  $|\bar{\delta}| < |\delta|$ . Положим  $\bar{\gamma}(t) = f(\bar{\delta}(t))$ , тогда  $\bar{\gamma}$  — кривая на  $\mathcal{C}$ , соединяющая концы кривой  $\gamma$ . По лемме 9.39, имеем  $|\bar{\gamma}| < |\gamma|$ , противоречие с тем, что  $\gamma$  — кратчайшая кривая.  $\square$

**Замечание 9.42.** Отметим, что кратчайшие кривые мы искали среди гладких кривых. Однако из наших рассуждений не вытекает, как устроены кратчайшие кривые в классе *всех непрерывных* кривых на цилиндре (на самом деле, ответ не изменится; проверьте).

## 9.2 Геодезические

Локально кратчайшие кривые, т.е. такие кривые, у которых малые фрагменты являются кратчайшими, называются геодезическими. Дадим соответствующее определение.

**Определение 9.43.** Кривая  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{S}$  в объемлющем пространстве  $\mathcal{S}$  называется *геодезической*, если для любого  $t \in [a, b]$  существует такое  $\varepsilon > 0$  (зависящее, вообще говоря, от  $t$ ), что ограничение  $\gamma$  на отрезок  $[a, b] \cap [t - \varepsilon, t + \varepsilon]$  является кратчайшей кривой.

**Пример 9.44.** Геодезическими в евклидовом пространстве являются отрезки прямых и только они. Тем самым множество геодезических в этом случае совпадает с множеством кратчайших кривых.

**Пример 9.45.** В манхеттенском пространстве существуют геодезические, не являющиеся кратчайшими кривыми. В качестве примера можно рассмотреть “букву П”, стороны которой параллельны координатным осям. Более того, добавив еще ряд “поворотов” к букве П, можно превратить ее в геодезическую спираль, у которой могут быть даже самопересечения.

**Пример 9.46.** На сфере каждая геодезическая — это траектория движения по некоторой сферической прямой. При этом допускается многократный проход сферической прямой, тем самым здесь также возможны самопересечения.

**Пример 9.47.** На выпуклом многограннике кривая  $\gamma$  является геодезической, если и только если в каждой грани она — отрезок прямой, в каждой внутренней точке ребра многогранника, через которую проходит  $\gamma$ , выполняется закон “угол падения равен углу преломления”, и  $\gamma$  не проходит через вершины. Если многогранник невыпуклый, то геодезическая может проходить через вершины, и тогда в каждой такой вершине оба угла между выходящими из нее отрезками геодезической больше или равны  $\pi$ .

**Конструкция 9.48.** Пусть  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{S}$  — замкнутая кривая и  $\varepsilon > 0$ . Зададим отображение  $\gamma^\varepsilon: [a, b + \varepsilon] \rightarrow \mathcal{S}$ , положив  $\gamma^\varepsilon(t) = \gamma(t)$  при  $t \leq b$  и  $\gamma^\varepsilon(t) = \gamma(a + (t - b))$  при  $t \geq b$ . Ясно, что  $\gamma^\varepsilon$  — непрерывная кривая, совпадающая на  $[a, b]$  с исходной кривой  $\gamma$ , а при  $t > b$  продолжающая движение по  $\gamma$ .

**Определение 9.49.** Замкнутая кривая  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{S}$  в объемлющем пространстве  $\mathcal{S}$  называется *замкнутой геодезической*, если для некоторого  $\varepsilon > 0$  кривая  $\gamma^\varepsilon$  — геодезическая.

**Пример 9.50.** На сфере замкнутые геодезические без самопересечений — это все сферические прямые.

**Пример 9.51.** На рассмотренном выше прямом круговом цилиндре замкнутые геодезические без самопересечений — это все окружности, параллельные плоскости  $xy$ .

На границах многогранников замкнутые геодезические без самопересечений описаны в очень немногих случаях. Г. Гальперин (см. [4]).



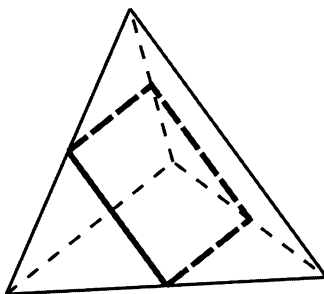


Рис. 9.2: Замкнутая геодезическая без самопересечений на тетраэдре

[5]) показал, что на случайно взятом выпуклом многограннике таких геодезических нет. В статье [6] разбирается случай тетраэдров. В [7] приведены интересные задачи о замкнутых геодезических на многогранниках. Некоторые из них мы включили в упражнения.

## Литература к главе 9

- [1] Shephard G.C. *Convex Polytopes with Convex Nets*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1975, v. 78, p. 389–403.
- [2] Wikipedia, *Открытые математические проблемы*.
- [3] Bern M., Demaine E.D., Eppstein D., and Kuo E. *Ununfoldable Polyhedra*. Proc. 11th Canadian Conference on Computational Geometry, 1999, pp. 13-16. Preprint dated 3 Aug 1999 available from <http://arxiv.org/abs/cs.CG/9908003>.
- [4] Гальперин Г.А. *О теореме Лостерника—Шнирельмана для многогранников*. УМН, 1991, т. 46, N 6(282), с. 207–208.
- [5] Galperin G. *Convex polyhedra without simple closed geodesics*. Regular and chaotic dynamics, 2003, v. 8, N 1, p.45–58.
- [6] Протасов В.Ю. *Замкнутые геодезические на поверхности симплекса*. Матем. сб., 2007, т. 198, N 2, с. 103–120.
- [7] Протасов В.Ю. *Геодезические на многогранниках*. <http://www.mccme.ru/mmks/mar08/Poincare.pdf>

- [8] Люстерник Л.А. *Кратчайшие линии. Вариационные задачи*. М.: Гостехиздат, 1955, Серия: Популярные лекции по математике, выпуск 19.

## Упражнения к главе 9

**Упражнение 9.1.** Опишите кратчайшие кривые на плоскости с нормой  $\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$ .

**Упражнение 9.2.** Дайте полное описание кратчайших кривых на прямом круговом цилиндре.

**Упражнение 9.3.** Опишите кратчайшие кривые и геодезические на (бесконечном) прямом круговом конусе.

**Упражнение 9.4.** Приведите пример геодезической, являющейся замкнутой кривой, но не являющейся замкнутой геодезической.

**Упражнение 9.5.** Докажите, что в каждой компоненте, на которые замкнутая геодезическая без самопересечений делит границу выпуклого многогранника, сумма кривизн всех попавших в компоненту вершин многогранника равна  $2\pi$ .

**Упражнение 9.6.** Постройте пример замкнутой геодезической на выпуклом многограннике, являющейся пространственным треугольником.

**Упражнение 9.7.** Докажите, что на тетраэдре не может быть геодезических, представляющих собой треугольник в евклидовом пространстве.

**Упражнение 9.8.** Докажите, что все четырехугольные замкнутые геодезические на правильном тетраэдре являются прямоугольниками.

**Упражнение 9.9.** Постройте пример восьмиугольной геодезической на правильном тетраэдре.

**Упражнение 9.10.** Найдите на поверхности куба замкнутую геодезическую, являющуюся

- (1) квадратом;
- (2) правильным шестиугольником;
- (3) неплоским шестиугольником.

**Упражнение 9.11.** Докажите, что правильная треугольная пирамида, у которой боковое ребро не равно стороне основания, не содержит замкнутых геодезических без самопересечений.

# Глава 10

## Минимальные сети

**План.** Сети, длина сети, граница сети, внутренние вершины сети, оптимальные сети, кратчайшие деревья или минимальные деревья Штейнера, кратчайшие деревья на евклидовой плоскости, задача Ферма, точка Ферма, точка Торричелли, линии Симпсона, локальная структура кратчайших деревьев, локально минимальные деревья, алгоритм построения кратчайшего дерева на евклидовой плоскости, деревья Штейнера, полные деревья Штейнера, полные или невырожденные компоненты дерева Штейнера, алгоритм Мелзака, прямой и обратный ход алгоритма Мелзака, формула Максвелла длины локально минимальной сети, замкнутые локально минимальные сети на поверхностях многогранников, ячейки сети.

Естественным обобщением кратчайшей кривой, соединяющей пару точек объемлющего пространства, является минимальное дерево, возникающее, если увеличить число точек, которые требуется соединить.

Пусть дано некоторое пространство  $\mathcal{S}$ . Как и в случае с кратчайшими кривыми, предположим, что в пространстве  $\mathcal{S}$  мы можем проводить кривые и измерять их длины. Последнее означает, что мы можем реализовывать в этом пространстве различные графы, выбирая в качестве множеств вершин этих графов точки из  $\mathcal{S}$ , а в качестве ребер — кривые, соединяющие некоторые из выбранных точек. Для связных графов такие геометрические представления будем называть *сетями* в  $\mathcal{S}$ . Сумму длин всех ребер сети назовем ее *длиной*.

Пусть теперь в  $\mathcal{S}$  фиксирован некоторый конечный набор точек  $M = \{P_1, \dots, P_n\}$ . В качестве конфигурационного пространства рассмотрим все сети, множества вершин которых содержат  $M$ . Про каждую из таких сетей будем говорить, что она *соединяет*  $M$ , а само множество  $M$  будем называть *граничным* для рассматриваемой сети. При этом, вершины из  $M$  также назовем *граничными*. Отметим, что, помимо граничных вершин, сеть может содержать и другие вершины, которые называются *внутренними*.

В качестве вариационного функционала возьмем функцию длины сетей. Таким образом, мы приходим к задаче о поиске наименьшего значения этого функционала и описания тех сетей, на которых это наименьшее значение достигается. Ясно, что если в оптимальной сети содержится цикл, то, удаляя из него любое ребро, мы получим сеть, соединяющую то же  $M$  и не более длинную, чем исходная. Таким образом, при изучении оптимальных сетей можно ограничиться связными графами без циклов, т.е. деревьями. Кроме того, всегда можно считать, что оптимальные деревья не содержат внутренних вершин степени 1, так как входящие в такие вершины ребра можно удалять, не увеличивая длину, сохраняя связность и не меняя границу рассматриваемого дерева; также можно считать, что такие деревья не содержат и внутренних вершин степени 2, так как для каждой такой вершины входящие в нее ребра можно объединить в одно, и при этом снова ни длина, ни связность, ни граница сети не изменятся. Именно такие оптимальные сети мы и будем рассматривать в дальнейшем и называть *кратчайшими деревьями*, хотя традиционно их называют *минимальными деревьями Штейнера*<sup>1</sup>.

Посмотрим некоторые примеры.

## 10.1 Кратчайшие деревья на евклидовой плоскости

Задача описания кратчайших деревьев на евклидовой плоскости носит название *проблема Штейнера* (см. сноску выше). Начнем с простейшего случая трех точек, изучением которого интересовался еще Ферма.

### 10.1.1 Задача Ферма

Итак, пусть на плоскости заданы три точки  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ . Требуется найти кратчайшее дерево  $G$ , соединяющее эти точки. Как было уже отмечено выше, вершины степени 1 и 2 дерева  $G$  должны принадлежать множеству  $M = \{A_i\}$ . Сколько может быть внутренних вершин у такого дерева?

---

<sup>1</sup>В действительности, задачу изучения кратчайших деревьев поставили Ярник и Кёсслер [1], а в простейшем частном случае этой задачей интересовался еще Ферма [2]. Штейнер занимался похожей, но другой задачей. Путаница возникла благодаря популярной книге [3].

**Задача 10.1.** Пусть  $G$  — произвольное дерево с множеством вершин  $V$ , и  $M \subset V$  содержит все вершины степени 1 и 2. Пусть  $n$  — число элементов в  $M$ . Тогда  $V \setminus M$  содержит не более  $n - 2$  вершин.

Таким образом, в рассматриваемом случае число внутренних вершин не больше 1. Поэтому, если в  $G$  имеется внутренняя вершина  $S$ , то, так как ее степень не меньше 3, а других вершин, кроме граничных, нет,  $S$  соединена ребрами со всеми  $A_i$ . Если же внутренних вершин нет, то  $G$  содержит два ребра — две стороны треугольника  $A_1A_2A_3$ . Эту вторую возможность можно рассматривать как частный случай первой возможности, считая, что вершина  $S$  совпала с одной из вершин  $A_i$ . Таким образом, задача о поиске кратчайшего дерева сводится к задаче об оптимальном расположении точки  $S$ : для заданных трех точек  $A_1, A_2$  и  $A_3$  евклидовой плоскости найти точку  $S$ , называемую *точкой Ферма*, для которой величина  $\sum_{i=1}^3 |SA_i|$  наименьшая возможная. Сформулированная только что проблема называется *задачей Ферма*, и следующее упражнение фактически является ответом.

**Задача 10.2.** Докажите, что если в треугольнике  $A_1A_2A_3$  один из углов больше или равен  $2\pi/3$ , то точка  $S$  совпадает с вершиной этого угла. Если же в треугольнике  $A_1A_2A_3$  все углы меньше  $2\pi/3$ , то положение точки  $S$  однозначно определяется следующим построением. Обозначим через  $A'_k, \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ , точку на плоскости, для которой треугольник  $A_iA_jA'_k$  — правильный, пересекающийся с треугольником  $A_1A_2A_3$  по стороне  $A_iA_j$ . Тогда окружности, описанные

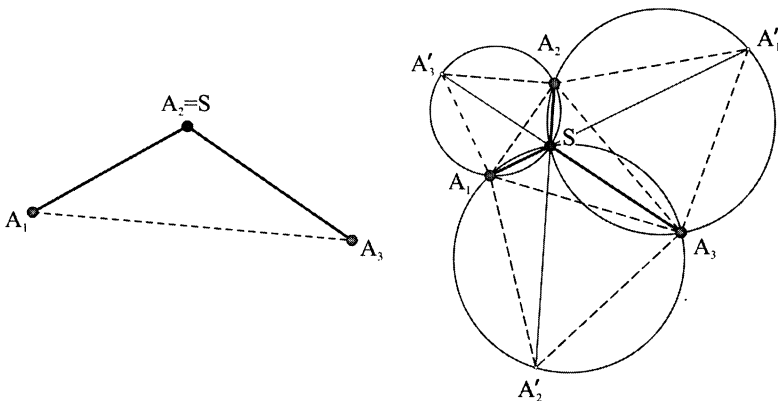


Рис. 10.1: Решение задачи Ферма

вокруг треугольников  $A_i A_j A'_k$ , а также отрезки  $[A'_i A_i]$ , называемые **линиями Симпсона**, пересекаются в точке  $S$ , которая называется **точкой Торричелли**, см. рис. 10.1. Длины линий Симпсона равны между собой и равны длине построенной кратчайшей сети, т.е. величине  $\sum_{i=1}^3 |SA_i|$ .

Отметим, что в каждом из рассмотренных в задаче 10.2 случаев угол между смежными ребрами-отрезками геометрической реализации кратчайшего дерева не меньше  $120^\circ$ , при этом в вершине степени 3 все три угла равны между собой и, значит, равны  $120^\circ$ .

### 10.1.2 Локальная структура кратчайших деревьев. Локально минимальные деревья

Решение задачи Ферма мгновенно приводит к следующей теореме, описывающей *локальную структуру* кратчайших деревьев, т.е. то, как стыкуются ребра-отрезки геометрической реализации кратчайшего дерева в вершинах этого дерева.

**Теорема 10.3** (О локальной структуре кратчайшего дерева). *Все ребра кратчайшего дерева — прямолинейные отрезки, причем углы между ребрами-отрезками, входящими из общей вершины, не меньше  $120^\circ$ , поэтому степени вершин таких деревьев не превосходят 3. Таким образом, степени внутренних вершин всегда равны только 3, и стыкующиеся в них ребра образуют углы в  $120^\circ$ ; степени граничных вершины могут равняться 1, 2 или 3, причем в граничной вершине степени 2 отрезки стыкуются под углом, не меньшим  $120^\circ$ , а в граничной вершине степени 3 — так же, как и во внутренней вершине.*

*Доказательство.* Если ребро кратчайшего дерева  $G$  не является прямолинейным отрезком, то, заменив его на отрезок, соединяющий концы этого ребра, мы уменьшим длину дерева  $G$ , не нарушив связности и не изменив границу, что невозможно.

Если угол между ребрами дерева  $G$ , выходящими из общей вершины  $P$ , меньше  $120^\circ$ , то отложим на этих ребрах маленькие отрезки  $[P, X]$  и  $[P, Y]$ , тогда в треугольнике  $PXY$  все углы будут меньше  $2\pi/3$ , поэтому, в силу задачи 10.2, кратчайшее дерево для граничного множества  $\{P, X, Y\}$  содержит внутреннюю вершину и, в силу единственности решения задачи Ферма для каждой конкретной границы, длина этого дерева меньше  $|PX| + |PY|$ , поэтому, заменив в  $G$  ломаную  $PXY$  на кратчайшее дерево для границы  $\{P, X, Y\}$ , мы уменьшим длину  $G$ , не нарушив связности и не изменив границы, что невозможно. Доказательство закончено.  $\square$

Отметим, что не всякое дерево с описанной выше локальной структурой является кратчайшим (ниже мы приведем пример). Плоское дерево с ребрами-отрезками, стыкующимися под углами величины не меньше  $120^\circ$ , и с границей, содержащей все вершины степени 1 и 2, называется *локально минимальным*. Таким образом, каждое кратчайшее дерево на плоскости является локально минимальным, и класс локально минимальных деревьев шире класса всех кратчайших деревьев.

Отметим также, что типы локально минимальных деревьев с границей  $M$  можно искать среди *деревьев Штейнера*, которые представляют собой соединяющие  $M$  деревья с прямолинейными ребрами, причем степени вершин этих деревьев не превосходят 3, а все вершины степени 1 и 2 лежат в  $M$ .

### 10.1.3 Алгоритм построения кратчайшего дерева на евклидовой плоскости

Обсудим теперь, как по заданному граничному множеству  $M$  на евклидовой плоскости построить кратчайшее дерево, соединяющее это множество. Самый грубый алгоритм состоит следующем. Рассмотрим все деревья Штейнера  $G$ , соединяющие  $M$ ; для каждого такого дерева найдем такое положение внутренних вершин, при котором длина дерева наименьшая (это дерево всегда существует; обозначим его через  $\Gamma_G$ ); из всех построенных так деревьев  $\Gamma_G$  выберем деревья наименьшей длины.

На самом деле, не всякое дерево  $\Gamma_G$  является локально минимальным. Действительно, пусть  $M = \{P_1, \dots, P_4\}$  — последовательные вершины единичного квадрата,  $S_1$  и  $S_2$  — внутренние точки дерева Штейнера  $G$ , соединяющего  $M$ , и предположим, что  $S_1$  соединена ребрами с точками  $S_2$ ,  $P_1$  и  $P_3$ , а  $S_2$ , соответственно, — с  $S_1$ ,  $P_2$  и  $P_4$ . Тогда длина ломаной  $P_1S_1P_3$ , а также длина ломаной  $P_2S_2P_4$ , не меньше  $\sqrt{2}$ , так что длина дерева  $\Gamma_G$  не меньше  $2\sqrt{2} + |S_1S_2| \geq 2\sqrt{2}$ . Если поместить  $S_1$  и  $S_2$  в центр квадрата, у полученного дерева длина будет наименьшей возможной. Действительно, если хотя бы одна из  $S_i$  не совпадает с центром квадрата, то длина дерева больше  $2\sqrt{2}$ , так как или одна из ломаных  $P_1S_1P_3$  и  $P_2S_2P_4$  не является отрезком, содержащим соответствующее  $S_i$ , или же  $|S_1S_2| > 0$ .

В силу сделанного выше замечание, деревья  $\Gamma_G$ , не являющиеся локально минимальными, имеют заведомо большую длину, чем кратчайшее дерево. Такие деревья полезно научиться распознавать и выки-



дывать из рассмотрения заранее, без определения положения их внутренних вершин, что в некоторых случаях оказывается возможным.

Итак, задача построения кратчайшего дерева сводится к такому вопросу: как для данного дерева Штейнера  $G$ , соединяющего конечное подмножество  $M$  точек евклидовой плоскости, выяснить, будет ли дерево  $\Gamma_G$  локально минимальным, и если да, то определить положения внутренних вершин дерева  $\Gamma_G$ , а также вычислить его длину.

Для ответа на этот вопрос, мы начнем с того, что разрежем дерево  $G$  по всем граничным вершинам степени больше 1. Тогда дерево  $G$  распадется на *невыврожденные* деревья Штейнера  $G_i$  или, как принято говорить в англоязычной литературе, на *полные* деревья Штейнера, которые называются *невыврожденными компонентами* или *полными компонентами* дерева  $G$ . Заметим, что множества  $M_i \subset M$ , которые соединяют  $G_i$ , состоят в точности из всех вершин деревьев  $G_i$  степени 1, а также что в  $G_i$  нет вершин степени 2. Таким образом, у невыврожденных деревьев Штейнера граничные вершины имеют степень 1, а внутренние — степень 3.

Приводимое ниже упражнение показывает, как проверку существования локально минимального дерева данного типа можно свести к проверке существования локально минимальных невыврожденных деревьев.

**Задача 10.4.** Покажите, что для дерева Штейнера  $G$ , соединяющего конечное подмножество  $M$  точек евклидовой плоскости, существует локально минимальное дерево  $\Gamma_G$  тогда и только тогда, когда для всех невыврожденных компонент  $G_i$  дерева  $G$ , соединяющих соответствующие множества  $M_i \subset M$ , существуют локально минимальные деревья  $\Gamma_{G_i}$ , причем ребра-отрезки деревьев  $\Gamma_{G_i}$  стыкуются в общих вершинах под углами, не меньшими  $120^\circ$ .

Алгоритм, который для невыврожденного дерева Штейнера  $G$  проверяет, является ли  $\Gamma_G$  локально минимальным, и, в случае положительного ответа, строит его, называется *алгоритмом Мелзака*, к описанию идеи которого мы сейчас и перейдем. Подробности можно найти в [4], [5], [6].

#### 10.1.4 Алгоритм Мелзака

Пусть  $G$  — невыврожденное дерево Штейнера. Пара  $\{e_1, e_2\}$  смежных ребер, выходящих из граничных вершин  $P_1$  и  $P_2$ , называется *усами* дерева  $G$ , а пара  $\{P_1, P_2\}$  — *вершинами усов*  $\{e_1, e_2\}$ .

**Задача 10.5.** Покажите, что каждое невырожденное дерево Штейнера с не менее чем тремя граничными вершинами имеет не менее двух усов.

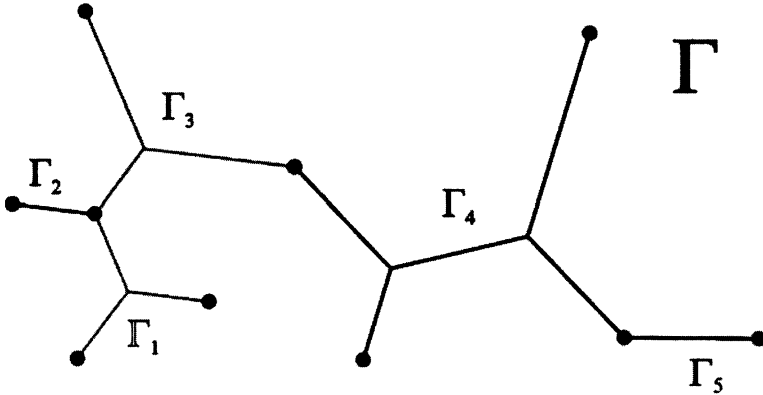


Рис. 10.2: Невырожденные компоненты локально минимального дерева

Предположим, что  $\Gamma_0 = \Gamma_G$  — невырожденное локально минимальное дерево с не менее чем тремя граничными вершинами. Рассмотрим усы  $\{e_1, e_2\}$  дерева  $\Gamma_0$  с вершинами  $\{P_1, P_2\}$ , и пусть  $S$  — общая вершина ребер  $e_i$ , а  $e$  — третье выходящее из  $S$  ребро дерева  $\Gamma_0$ . Легко видеть, что если продолжить ребро  $e$  за вершину  $S$ , то такое продолжение пройдет через вершину  $P_{1,2}$  правильного треугольника  $P_1P_2P_{1,2}$ , расположенного в той полуплоскости относительно прямой  $P_1P_2$ , которая не содержит  $S$ , см. рис. 10.3 слева.

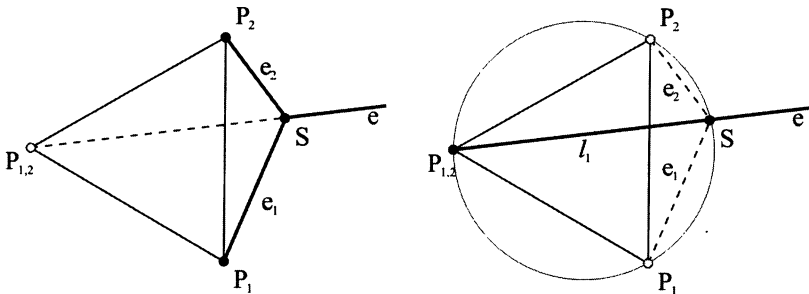


Рис. 10.3: Идея алгоритма Мелзака

Если теперь выкинуть из исходного дерева ребра  $e_1$  и  $e_2$ , а ребро  $e$  продлить до точки  $P_{1,2}$ , то таким образом мы построим локально минимальное дерево  $\Gamma_1$ , соединяющее граничное множество  $M_1$ , полученное из исходного заменой точек  $P_1$  и  $P_2$  на точку  $P_{1,2}$ . Такая перестройка границы и структуры невырожденного дерева Штейнера называется шагом *прямого хода алгоритма Мелзака*.

Отметим, что точка  $S$  лежит на пересечении проходящего через ребро  $e$  луча  $\ell_1$ , выпущенного из точки  $P_{1,2}$ , и окружности, описанной вокруг треугольника  $P_1P_2P_{1,2}$ , см. рис. 10.3 справа. Таким образом, зная дерево  $\Gamma_1$  и положение точек  $P_1$  и  $P_2$ , из которых была получена точка  $P_{1,2}$ , мы можем восстановить дерево  $\Gamma_0$ , укоротив луч  $\ell_1$  посредством выкидывания полуинтервала  $[P_{1,2}, S]$  и добавлением отрезков  $[S, P_1]$  и  $[S, P_2]$  (при этом граничное множество перестраивается посредством замены точки  $P_{1,2}$  на пару точек  $P_1$  и  $P_2$ ). Такое восстановление называется шагом *обратного хода алгоритма Мелзака*.

Таким образом, алгоритм Мелзака сначала последовательно выполняет перестройку граничного множества и структуры невырожденного дерева Штейнера до тех пор, пока граничное множество  $M_k$  не будет состоять из двух точек, а соединяющее их дерево  $\Gamma_k$  — из одного ребра. Затем алгоритм Мелзака запускает обратный ход, в результате которого последовательно строятся локально минимальные деревья, соединяющие  $M_{k-1}$ ,  $M_{k-2}$  и т.д., вплоть до  $M$ . Однако, если заранее не известно, что локально минимальное дерево существует, то на некотором шаге обратного хода может произойти сбой, см. рис. 10.4.

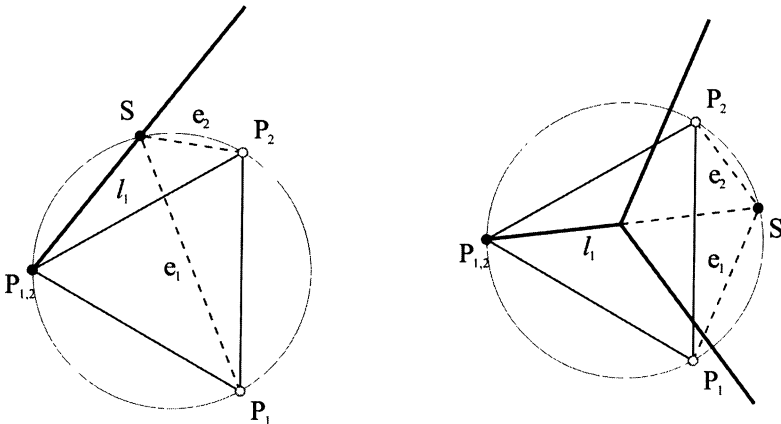


Рис. 10.4: Возможные сбои в обратном ходе алгоритма Мелзака

В первом случае луч  $\ell_1$  пересекает окружность, описанную вокруг треугольника  $P_1P_2P_{1,2}$ , не по внутренней дуги, ограниченной  $P_1P_2$  и не содержащей  $P_{1,2}$ . Во втором случае вершина перестроенного дерева, в которую приходит луч  $\ell_1$ , оказывается внутри круга, ограниченного окружностью, описанной вокруг треугольника  $P_1P_2P_{1,2}$ .

Отметим, что в прямом ходе алгоритма Мелзака имеется неопределенность: вообще говоря, априори не понятно, какой из двух правильных треугольников на вершинах усов нужно строить. Эта неоднозначность приводит к очень большому перебору. Однако имеется усовершенствование алгоритма [7], которое позволяет избавиться от подобной неопределенности за счет рассмотрения более хитрых фрагментов параметризующего дерева. Однако и эти усовершенствования оставляют алгоритм все еще слишком медленным для практических приложений. В [8] приведены существенные улучшения алгоритма, позволяющие получать за приемлемое время решение проблемы Штейнера для граничных множеств, состоящих из нескольких сотен точек.

**Задача 10.6.** Построить все локально минимальные деревья для вершин прямоугольника и выбрать из них кратчайшие. Выяснить, сколько кратчайших и какие существуют при данном отношении длин сторон прямоугольника.

## 10.2 Формула Максвелла

Эта формула [9], [10], [11] позволяет вычислить длину плоского локально минимального дерева только по координатам граничных точек и направлениям входящих в них ребер. На самом деле, формула вытекает из следующего простого соображения. Введем на плоскости декартову систему координат, тогда каждую точку можно рассматривать как вектор. Пусть  $[A, B]$  — произвольный отрезок. Тогда  $n_A = \vec{BA}/|AB|$  и  $n_B = \vec{AB}/|AB| = -n_A$  — единичные векторы направлений этого отрезка, ориентированного соответственно в сторону вершин  $A$  и  $B$ . Заметим, что  $|AB| = (B - A) \cdot n_B = A \cdot n_A + B \cdot n_B$ , где через  $X \cdot Y$  обозначено стандартное скалярное произведение векторов  $X$  и  $Y$ . Таким образом, длина локально минимальной сети, равная сумме длин всех ее ребер-отрезков, может быть записана по приведенной только-что формуле через координаты ее вершин и направления ее ребер. Однако во всех вершинах степени 3, в частности, во всех внутренних вершинах, сумма направлений входящих в такую вершину ребер равна нулю, поэтому, в силу билинейности скалярного произведения, вершины степени 3 да-

ют нулевой вклад в общую формулу. Итак, мы доказали следующую теорему.

**Теорема 10.7** (Формула Максвелла). Пусть  $G$  — плоское локально минимальное дерево, соединяющее  $M$ . Обозначим через  $M' \subset M$  множество всех граничных вершин дерева  $G$ , степени которых меньше 3. Для каждой такой вершины  $v$  обозначим через  $\xi_v$  сумму направлений входящих в нее ребер, тогда длина  $\ell(G)$  этого дерева может быть вычислена так:

$$\ell(G) = \sum_{v \in M'} v \cdot \xi_v.$$

**Задача 10.8.** В данной задаче мы будем пользоваться обозначениями теоремы 10.7. отождествим евклидову плоскость с полем комплексных чисел и будем рассматривать точки  $v$  и векторы  $\xi_v$  как комплексные числа. Докажите, что

$$\ell(G) = \sum_{v \in M'} v \bar{\xi}_v,$$

где через  $\bar{z}$  обозначено комплексное число, сопряженное к  $z$ .

### 10.3 Замкнутые локально минимальные сети на многогранниках

Естественным обобщением замкнутых геодезических являются замкнутые локально минимальные сети на поверхностях многогранников. Локальная минимальность означает, что каждый достаточно малый фрагмент таких сетей должен быть кратчайшим деревом; замкнутость — отсутствие границы. На рис. 10.5 приведены примеры таких сетей на поверхностях платоновых тел.

Уже в случае тетраэдров задача описания таких сетей крайне нетривиальна, и здесь полный ответ получен лишь для тетраэдров, все грани которых изометричны (для так называемых равногранных тетраэдров), см. [12] и [6]. Про сети на тетраэдрах общего вида можно прочитать в [13].

Рассмотрим случай выпуклых многогранников в трехмерном пространстве.

**Задача 10.9.** Пусть  $S = F$  — граница выпуклого многогранника  $W$ , и  $G$  — замкнутая локально минимальная сеть на  $F$ . Покажите, что  $G$

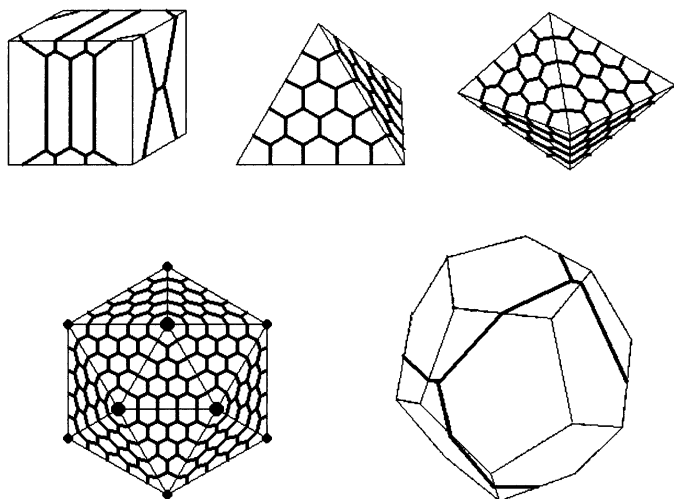


Рис. 10.5: Примеры замкнутых локально минимальных сетей на поверхностях платоновых тел

не проходит через вершины многогранника  $W$ , что ее ребра — геодезические, и что углы между стыкующимися в вершинах сети ребрами-геодезическими не меньше  $120^\circ$ , так что степени вершин сети  $G$  не превосходят 3. Более того, в вершинах степени 3 ребра стыкуются под углами в  $120^\circ$ , в вершинах степени 2 — под углами в  $180^\circ$ , а вершин степени 1 сеть не содержит.

Сеть  $G$  из задачи 10.9 разбивает  $F$  на компоненты, каждая из которых, вместе с ограничивающей ее ломаной, называется *ячейкой сети*  $G$ , так что каждая ячейка представляет собой некоторый многоугольник на  $F$ . Чтобы описать типы возможных ячеек сети  $G$ , воспользуемся упражнением 5.5.

**Предложение 10.10.** Пусть  $G$  — замкнутая локально-минимальная сеть на границе  $F$  выпуклого многогранника. Пусть  $X$  — произвольная ячейка сети  $G$  и  $n$  — количество сторон границы этой ячейки. Тогда

$$n = 6 - \frac{3}{\pi} \sum K(P_r),$$

где  $K(P_r)$  обозначает кривизну  $F$  в вершине  $P_r$  многогранника, а сумма берется по всем  $P_r$ , попавшим внутрь  $X$ . В частности,  $n \leq 6$ , причем равенство достигается тогда и только тогда, когда  $X$  не содержит вершин многогранника.

*Доказательство.* Приведенная в теореме формула является мгновенным следствием упражнения 5.5 и того факта, что все внутренние углы в ячейке  $X$  равны  $2\pi/3$ . Второе утверждение следует из того, что кривизна каждой вершины выпуклого многогранника положительна.  $\square$

В качестве примера рассмотрим правильный тетраэдр и выясним, как могут выглядеть замкнутые локально минимальные сети на нем. Кривизны его вершин равны  $\pi$ , поэтому сеть может иметь только те ячейки, которые являются 6-угольниками, 3-угольниками и 0-угольниками. Если имеется 0-угольник, то в нем нет вершин и, значит,  $G$  совпадает с границей этой ячейки и является замкнутой геодезической. В ячейке, являющейся 3-угольником, содержится ровно одна вершина тетраэдра. В 6-угольной ячейке вершин тетраэдра нет. Поэтому в сети  $G$ , отличной от замкнутой геодезической, имеется ровно 4 треугольных ячейки, в каждой — по одной вершине тетраэдра, и все остальные ячейки — пустые шестиугольные. Пример такой сети приведен на рис. 10.5.

**Задача 10.11.** Опишите возможные ячейки замкнутых локально минимальных сетей на поверхностях платоновых тел.

**Задача 10.12 (\*).** Покажите, что каждый выпуклый многогранник с треугольными гранями можно сколь угодно мало пошевелить, т.е. сместить его вершины в сколь угодно близкие точки объемлющего пространства, так, чтобы полученный многогранник остался выпуклым, однако на нем не существовало бы ни одной замкнутой локально минимальной сети.

Отметим, что в случае геодезических решение задачи 10.12 вытекает из теорем Г.А. Гальперина, см. [14] и [15].

## Литература к главе 10

- [1] Jarnik V., Kössler M. *O minimalnich grafeth obeahujicich n danijch bodu.* Cas. Pest. Mat. a. Fys., 1934, v. 63, pp. 223–235.
- [2] Fermat P. de (1643), Ed. H.Tannery, ed., *Oeuvres*, vol. 1, Paris 1891, Supplement: Paris 1922, pp. 153.

- [3] Курант Р. Роббинс Г. *Что такое математика?* 3-е изд., испр. и доп. М., 2001.
- [4] Melzak Z. A. *On the problem of Steiner*, *Canad. Math. Bull.*, 1960, N 4, pp. 143–148.
- [5] Melzak Z. A. *Companion to concrete mathematics*, Wiley–Interscience, New York, 1973.
- [6] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Теория экстремальных сетей*. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [7] Hwang F.K. *A linear time algorithm for full Steiner trees*. *Oper. Res. Letter*, 1986, N 5, pp. 235–237.
- [8] Warme D.M., Winter P., Zachariasen M. *Exact Algorithms for Plane Steiner Tree Problems. A Computational Study*. Technical Report DIKU-TR-98/11, Department of Computer Science, University of Copenhagen, DENMARK, 1998.
- [9] Maxwell J.C. *Cambridge Philos. Mag.*, 1864.
- [10] Maxwell J.C. *Trans. Roy. Soc. Edinburgh*, 1869, v. 26.
- [11] Gilbert E.N., Pollak H.O. *Steiner Minimal Trees*. *SIAM J. Appl. Math.*, 1968, v. 16, N 1, pp. 1–29.
- [12] Птицына И.В. *Классификация замкнутых минимальных сетей на тетраэдрах*. Матем. сб., 1994, т. 185, N 5, с. 119–138.
- [13] Стрелкова Н.П. *Замкнутые локально минимальные сети на поверхностях тетраэдров*. Матем. сб., 2011, т. 202, N 1, с. 141–160.
- [14] Гальперин Г.А. *О теореме Люстернака–Шнирельмана для многогранников*. УМН, 1991, т. 46, N 6, с. 207–208.
- [15] G. A. Galperin, *Convex polyhedra without simple closed geodesics*. *Regul. Chaotic Dyn.*, 2003, v. 8, N 1, 45–58.

## Упражнения к главе 10

**Упражнение 10.1.** Пусть  $G$  — произвольное дерево с множеством вершин  $V$ , и  $M \subset V$  содержит все вершины степени 1 и 2. Пусть  $n$  — число элементов в  $M$ . Тогда  $V \setminus M$  содержит не более  $n - 2$  вершин.



**Упражнение 10.2.** Пусть  $A_1A_2A_3$  — произвольный треугольник на плоскости, а  $S$  — точка плоскости, для которой величина  $\sum_{i=1}^3 |SA_i|$  наименьшая возможная. Докажите, что если в треугольнике один из углов больше или равен  $2\pi/3$ , то точка  $S$  совпадает с вершиной этого угла. Если же в треугольнике  $A_1A_2A_3$  все углы меньше  $2\pi/3$ , то положение точки  $S$  однозначно определяется следующим построением. Обозначим через  $A'_k$ ,  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ , точку на плоскости, для которой треугольник  $A_iA_jA'_k$  — правильный, пересекающийся с треугольником  $A_1A_2A_3$  по стороне  $A_iA_j$ . Тогда окружности, описанные вокруг треугольников  $A_iA_jA'_k$ , а также отрезки  $[A'_iA_i]$ , называемые **линиями Симпсона**, пересекаются в точке  $S$ . Длины линий Симпсона равны между собой и равны длине построенной кратчайшей сети, т.е. величине  $\sum_{i=1}^3 |SA_i|$ .

**Упражнение 10.3.** Покажите, что для дерева Штейнера  $G$ , соединяющего конечное подмножество  $M$  точек евклидовой плоскости, существует локально минимальное дерево  $\Gamma_G$  тогда и только тогда, когда для всех невырожденных компонент  $G_i$  дерева  $G$ , соединяющих соответствующие множества  $M_i \subset M$ , существуют локально минимальные деревья  $\Gamma_{G_i}$ , причем ребра-отрезки деревьев  $\Gamma_{G_i}$  стыкуются в общих вершинах под углами, не меньшими  $120^\circ$ .

**Упражнение 10.4.** Покажите, что каждое невырожденное дерево Штейнера с не менее чем тремя граничными вершинами имеет не менее двух углов.

**Упражнение 10.5.** Построить все локально минимальные деревья для вершин прямоугольника и выбрать из них кратчайшие. Выяснить, сколько кратчайших и какие существуют при данном отношении длин сторон прямоугольника.

**Упражнение 10.6.** Пусть  $G$  — плоское локально минимальное дерево, соединяющее  $M$ . Обозначим через  $M' \subset M$  множество всех граничных вершин дерева  $G$ , степени которых меньше 3. Для каждой такой вершины  $v$  обозначим через  $\xi_v$  сумму направлений входящих в нее ребер, а через  $\ell(G)$  — длину этого дерева. Отождествим евклидову плоскость с полем комплексных чисел и будем рассматривать точки  $v$  и векторы  $\xi_v$  как комплексные числа. Докажите, что

$$\ell(G) = \sum_{v \in M'} v \bar{\xi}_v,$$

где через  $\bar{z}$  обозначено комплексное число, сопряженное к  $z$ .

**Упражнение 10.7.** Пусть  $S = F$  — граница выпуклого многогранника  $W$ , и  $G$  — замкнутая локально минимальная сеть на  $F$ . Покажите, что  $G$  не проходит через вершины многогранника  $W$ , что ее ребра — геодезические, и что углы между стыкующимися в вершинах сети ребрами-геодезическими не меньше  $120^\circ$ , так что степени вершин сети  $G$  не превосходят 3. Более того, в вершинах степени 3 ребра стыкуются под углами в  $120^\circ$ , в вершинах степени 2 — под углами в  $180^\circ$ , а вершин степени 1 сеть не содержит.

**Упражнение 10.8.** Опишите возможные ячейки замкнутых локально минимальных сетей на поверхностях платоновых тел.

**Упражнение 10.9.** Покажите, что если выпуклый многогранник с треугольными гранями не содержит замкнутых локально минимальных сетей, то и каждый достаточно близкий выпуклый многогранник, т.е. полученный из исходного любыми достаточно малыми смещениями вершин, также не содержит замкнутых локально минимальных сетей.

**Упражнение 10.10 (\*).** Покажите, что каждый выпуклый многогранник с треугольными гранями можно сколь угодно мало пошевелить, т.е. сместить его вершины в сколь угодно близкие точки объемлющего пространства, так, чтобы полученный многогранник остался выпуклым, однако на нем не существовало бы ни одной замкнутой локально минимальной сети.

**Упражнение 10.11 (\*).** Обобщите понятие замкнутых локально минимальных сетей на случай, когда объемлющее пространство  $S$  — стандартная сфера. Покажите, что, с точностью до движения, на сфере существует ровно 10 таких сетей.

## Глава 11

# Инварианты плоских замкнутых кривых

**План.** Кривые на плоскости, замкнутая кривая, гладкая кривая, гладкая замкнутая кривая, вектор скорости гладкой кривой, регулярная кривая, замена параметра, допустимая замена параметра, непараметризованная регулярная кривая, периодические функции, их свойства, среднее значение интегрируемой периодической функции, свойство первообразной периодической функции, деформация или регулярная гомотопия регулярной кривой, число вращения замкнутой регулярной кривой, теорема Уитни–Грауштейна о классификации замкнутых регулярных кривых с точностью до регулярной гомотопии, натуральная параметризация, точки самопересечения, теорема Хопфа о числе вращения несамопересекающейся замкнутой регулярной кривой, число Уитни замкнутой регулярной кривой, формулировка теоремы Уитни о связи числа Уитни, числа вращения и индекса точки.

Цель настоящей лекции — описать всевозможные замкнутые кривые на евклидовой плоскости, для которых в каждой точке существует вектор скорости, причем этот вектор всюду отличен от нуля (такие кривые называются регулярными); при этом одинаковыми (эквивалентными) считаются кривые, которые можно деформировать друг в друга, не зануляя нигде векторы скорости. Оказывается, каждой такой кривой можно по определенному правилу приписать целое число, причем две кривые эквивалентны тогда и только тогда, когда эти числа совпадают. Для того чтобы доказать (и даже аккуратно сформулировать) этот результат, нам потребуются некоторые предварительные сведения о замкнутых регулярных кривых и их деформациях, а также о периодических функциях.

## 11.1 Замкнутые гладкие и регулярные кривые на плоскости

В предыдущих лекциях мы уже определили кривую  $\gamma(t)$  на евклидовой плоскости как пару  $(x(t), y(t))$  непрерывных функций, где  $t$  меняется на отрезке  $[a, b]$ . Мы назвали кривую  $\gamma$  *замкнутой*, если  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Кривую назовем *гладкой*, если задающие ее функции являются бесконечно дифференцируемыми. *Замкнутую кривую*  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  назовем *гладкой*, если не только функции  $x(t)$  и  $y(t)$  гладкие, но и все производные как функции  $x(t)$ , так и функции  $y(t)$ , вычисленные в точках  $a$  и  $b$ , совпадают.

Как ни удивительно, но гладкие кривые не отвечают наглядному представлению о кривых без “изломов” и “заострений” — это показывают следующие два примера.

**Пример 11.1.** Полукубическая парабола  $\gamma(t) = (t^3, t^2)$  имеет при  $t = 0$  точку возврата — острие.

**Пример 11.2.** Пусть  $f(t)$  — функция, равная нулю при  $t \leq 0$  и  $e^{-\frac{1}{t}}$  при  $t > 0$ . Эта функция бесконечно дифференцируема всюду (докажите!). Кривая  $\gamma(t) = (f(t), f(-t))$  представляет собой прямой угол на плоскости; при  $t = 0$  она терпит излом.

В приведенных примерах наличие изломов легко объяснимо. Действительно, кривая — это закон движения точки по плоскости с течением времени  $t$ . Если в некоторый момент времени движение останавливается (т.е. его скорость обращается в ноль), в следующие моменты оно может продолжиться в любом направлении — в частности, под каким угодно углом к тому, к которому это направление стремилось при приближении к точке остановки. Чтобы избавиться от таких эффектов, введем понятие регулярной кривой.

**Определение 11.3.** Пусть  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  — гладкая кривая. Тогда  $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$  называется *вектором скорости* кривой  $\gamma$ . Гладкая кривая называется *регулярной*, если ее вектор скорости всюду отличен от нуля.

Еще одно уточнение понятия кривой связано с заменой параметризации. Ясно, что по одной и той же траектории можно двигаться с разной скоростью; другими словами, каждая гладкая функция  $\psi: [a', b'] \rightarrow [a, b]$ , производная которой в каждой точке строго положительна, задает регулярную кривую  $\gamma(\psi(\tau))$  с тем же самым образом, что и  $\gamma$  (т.е. состоящую из тех же точек плоскости). Про такую

кривую говорят, что она получена из кривой  $\gamma$  допустимой заменой параметра  $\psi$  (отметим, что обратная замена  $\psi^{-1}$  тоже допустима). Если гладкая кривая  $\gamma$  замкнута, то про допустимую замену параметра  $\psi$  предполагаем дополнительно, что все производные функции  $\psi$  на концах отрезка  $[a', b']$  равны, поэтому в этом случае кривая  $\gamma \circ \psi$  также является замкнутой гладкой кривой. Те свойства кривых, которые изучаются ниже, не меняются при допустимых заменах параметра; фактически мы изучаем не закон движения, а его траекторию, т.е. совокупность кривых, получаемых друг из друга допустимыми заменами параметра. Абстрактное определение выглядит следующим образом: назовем две регулярные кривые эквивалентными, если они получаются друг из друга допустимой заменой параметра (проверьте, что это — действительно отношение эквивалентности); *непараметризованной регулярной кривой* называется класс эквивалентности регулярных кривых. В дальнейшем мы будем допускать некоторую вольность в терминологии, называя просто кривой как регулярную (параметризованную) кривую, так и ее класс эквивалентности.

Нам будет удобно параметризовать замкнутые кривые не точками отрезка, а точками прямой; свойство замкнутости при этом будет обеспечиваться периодичностью соответствующих функций.

Отметим, что для произвольной замкнутой кривой  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  функции  $x(t)$  и  $y(t)$  продолжаются с отрезка  $[a, b]$  на всю прямую  $\mathbb{R}$  до функций  $X(t)$  и  $Y(t)$  по следующему правилу. Ясно, что каждое  $t \in \mathbb{R}$  однозначно представимо в виде  $t_0 + nT$ , где  $T = b - a$ , число  $n$  — целое, а  $t_0$  лежит на полуинтервале  $[a, b)$ . Положим  $X(t) = x(t_0)$  и  $Y(t) = y(t_0)$ ; тем самым мы определили отображение  $\Gamma(t) = (X(t), Y(t))$ , которое можно интерпретировать как бесконечную намотку прямой  $\mathbb{R}$  на исходную кривую  $\gamma$ .

Заметим, что требование (в определении гладкой замкнутой кривой) совпадения всех производных на концах кривой  $\gamma$  равносильно тому, что функции  $X(t)$  и  $Y(t)$  предполагаются бесконечно дифференцируемыми. Отметим также, что для функций  $X(t)$  и  $Y(t)$  выполняется следующее условие:  $X(t + nT) = X(t)$  и  $Y(t + nT) = Y(t)$  при каждом  $t$  и каждом целом  $n$ . Такие функции называются периодическими; в следующем параграфе мы поговорим о свойствах периодических функции более детально.

**Замечание 11.4.** Определение замкнутой регулярной кривой можно переформулировать следующим образом: это пара гладких функций  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , определенных на всей оси и периодических, причем вектор скорости  $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$  нигде не обращается в нуль. Так же как и ранее, мы будем допускать замены параметра на кривой; если

$t = t(t')$  — такая замена, то для функции  $t(t')$  (определенной теперь на всей оси), помимо гладкости и положительности производной, надо потребовать выполнение свойства, гарантирующего аналогичную периодичность новых функций  $\gamma(t(t'))$ . Это требование дается условием  $t(t' + T') = t(t') + T$ , где  $T, T'$  — старый и новый периоды соответственно.

### 11.1.1 Свойства периодических функций

Пусть  $f(t)$  — произвольная функция, определенная при всех  $t \in \mathbb{R}$ , и  $T \neq 0$  — некоторое действительное число.

**Определение 11.5.** Функция  $f(t)$  называется  $T$ -периодической, если  $f(t + T) = f(t)$  для всех  $t \in \mathbb{R}$ . Число  $T$  называется *периодом функции*  $f$ .

**Замечание 11.6.** Ясно, что если  $T$  — период функции  $f$ , то для любого целого  $k \neq 0$  число  $kT$  — тоже период. Ясно, кроме того, что постоянная функция является  $T$ -периодической с любым периодом  $T$ .

**Задача 11.7.** Докажите, что для любой непрерывной непостоянной периодической функции существует минимальный положительный период. Постройте пример непостоянной периодической функции, для которой не существует минимального положительного периода.

**Замечание 11.8.** Как правило, под периодом непрерывной периодической функции понимается именно наименьший положительный период.

**Задача 11.9.** Докажите, что для каждой  $T$ -периодической функции  $f(x)$  и произвольной функции  $g(x)$ , определенных на вещественной прямой  $\mathbb{R}$ , их композиция  $g(f(x))$  является  $T$ -периодической функцией.

**Задача 11.10.** Докажите, что производная дифференцируемой  $T$ -периодической функции — тоже  $T$ -периодическая функция.

**Замечание 11.11.** Для первообразных аналогичное утверждение, вообще говоря, неверно: первообразная периодической функции  $\cos^2 t$  — это функция  $\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + c$ , которая, очевидно, не периодическая. Причина этого явления состоит в том, что периодические функции, вообще говоря, обладают ненулевым средним значением, которое при интегрировании приводит к наличию линейных слагаемых. Следующее утверждение обосновывает корректность приводимого ниже определения среднего значения периодической функции.

**Предложение 11.12.** Пусть  $f(t)$  — произвольная интегрируемая  $T$ -периодическая функция, тогда величина

$$\int_t^{t+T} f(\xi) d\xi$$

не зависит от  $t$ .

*Доказательство.* Действительно,

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} f(\xi) d\xi &= \int_t^T f(\xi) d\xi + \int_T^{t+T} f(\xi) d\xi = \\ &= \int_t^T f(\xi) d\xi + \int_T^{t+T} f(\xi-T) d\xi = \int_t^T f(\xi) d\xi + \int_0^t f(\eta) d\eta = \int_0^T f(\varphi) d\varphi \end{aligned}$$

(во втором равенстве использована периодичность  $f$ , в третьем — замена переменной  $\eta = \xi - T$ ).  $\square$

**Определение 11.13.** Средним значением интегрируемой  $T$ -периодической функции называется, независящая от  $t$  в силу предложения 11.12, величина

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(\xi) d\xi.$$

**Предложение 11.14.** Первообразная  $F$  интегрируемой периодической функции  $f$  имеет вид

$$F(t) = t\bar{f} + F_0(t),$$

где функция  $F_0(t)$  — периодическая. В частности, первообразная интегрируемой периодической функции сама является периодической тогда и только тогда, когда ее среднее значение равно нулю.

*Доказательство.* Пусть  $F$  — первообразная для  $f$ , тогда

$$F(t) = c + \int_0^t f(\xi) d\xi.$$

Положим

$$F_0(t) = F(t) - t\bar{f} = c + \int_0^t f(\xi) d\xi - \frac{t}{T} \int_0^T f(\xi) d\xi.$$

Тогда

$$\begin{aligned} F_0(t+T) - F_0(t) &= \\ &= \int_0^{t+T} f(\xi) d\xi - \int_0^t f(\xi) d\xi - \frac{t+T}{T} \int_0^T f(\xi) d\xi + \frac{t}{T} \int_0^T f(\xi) d\xi = \\ &= \int_t^{t+T} f(\xi) d\xi - \int_0^T f(\xi) d\xi = 0 \end{aligned}$$

в силу предложения 11.12, так что  $F_0(t)$  является  $T$ -периодической функцией, что и требовалось.  $\square$

## 11.2 Число вращения. Классификация замкнутых регулярных кривых

Нас будет интересовать, когда две замкнутые регулярные кривые получаются друг из друга деформацией, сохраняющей регулярность; такие кривые называются регулярно гомотопными.

Неформально, деформация замкнутой регулярной кривой — это плавное изменение этой кривой со временем, причем в каждый момент времени измененная (деформированная) кривая остается регулярной и замкнутой.

**Определение 11.15.** Пусть  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  — произвольная регулярная замкнутая кривая. *Регулярной гомотопией* (или *деформацией*) кривой  $\gamma$  называется отображение  $r: \mathbb{R} \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , удовлетворяющее следующим условиям.

- (1) Вектор-функция двух переменных  $r(t, s)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ,  $s \in [c, d]$ ) бесконечно дифференцируема.
- (2) При каждом  $s \in [c, d]$  кривая  $\gamma_s(t) = r(t, s)$  регулярна и замкнута, т.е. функция  $r(t, s)$  периодична по  $t$  и вектор скорости  $\frac{\partial r}{\partial t}$  всюду отличен от нуля.
- (3) Кривая  $\gamma_c$  совпадает с исходной кривой  $\gamma$ :  $r(t, c) = \gamma(t)$ .

Если задана гомотопия  $\gamma_s$ ,  $s \in [c, d]$ , то принято говорить, что эта гомотопия *соединяет кривые*  $\gamma_c$  и  $\gamma_d$ . Гладкие регулярные замкнутые кривые, которые можно соединить регулярной гомотопией, называются *регулярно гомотопными*.



**Задача 11.16.** Постройте регулярную гомотопию

- (1) окружности и эллипса;
- (2) эллипса и овала  $\frac{x_1^4}{a_1^4} + \frac{x_2^4}{a_2^4} = 1$

для соответствующих регулярных параметризаций этих кривых.

**Задача 11.17.** Покажите, что отношение регулярной гомотопности является эквивалентностью. Покажите также, что допустимая замена параметра приводит к кривым, регулярно гомотопным исходной. Последнее обстоятельство означает, что отношение регулярной гомотопности можно рассматривать на непараметризованных кривых.

Наша ближайшая цель — выяснить, когда две данные регулярные кривые на плоскости  $\mathbb{R}^2$  регулярно гомотопны. Первое, что приходит в голову — сравнивать кривые по числу точек самопересечения. Оказывается, однако, что эта характеристика не инвариантна относительно регулярной гомотопии: на рис. 11.1 показан пример гомотопии, которая переводит кривую с двумя точками самопересечения в несамопересекающуюся кривую.

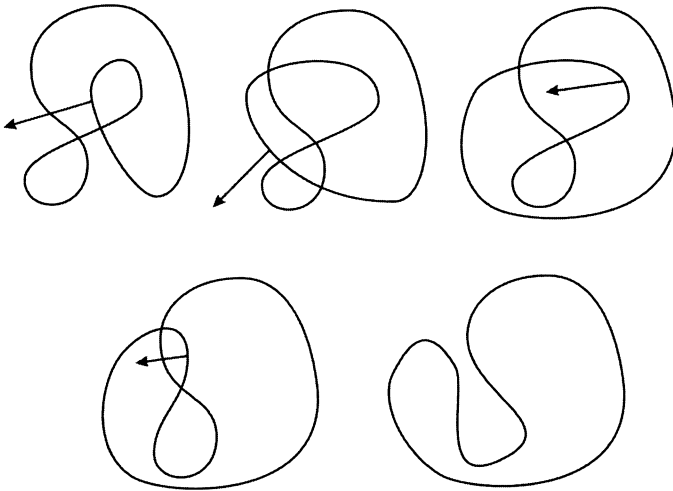


Рис. 11.1: Регулярная гомотопия, убывающая самопересечения

С другой стороны, на обеих кривых, изображенных на рис. 11.2, имеется по 2 точки самопересечения, однако эти кривые не являются регулярно гомотопными (это следует из доказываемой ниже теоремы).

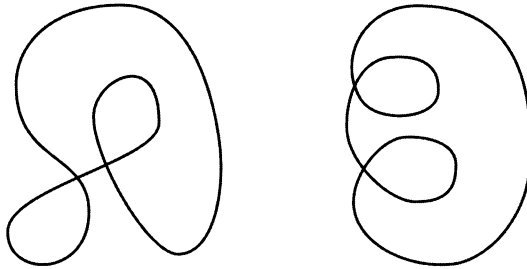


Рис. 11.2: Кривые, не являющиеся регулярно гомотопными, хотя каждая имеет ровно две точки самопересечения

Правильный инвариант замкнутой регулярной кривой  $\gamma(t)$  получается, если рассмотреть вращение вектора скорости  $v(t) = \dot{\gamma}(t)$ ; этот ненулевой вектор при изменении  $t$  на период совершает некоторое число оборотов вокруг начала координат. Будем считать каждый оборот против часовой стрелки со знаком “плюс”, а каждый оборот по часовой стрелке — со знаком “минус”.

**Определение 11.18.** Число вращения  $n_\gamma$  регулярной замкнутой кривой  $\gamma$  — это число оборотов ее вектора скорости.

Дадим формальное определение числа оборотов непрерывно зависящего от  $t$  вектора  $v(t) \in \mathbb{R}^2$ ,  $t \in [0, T]$ , такого, что  $v(0) = v(T)$  и  $v(t) \neq 0$  при всех  $t$ . Для этого в стандартной системе координат запишем  $v(t)$  в виде  $\rho(t)(\cos \varphi(t), \sin \varphi(t))$ , где  $\rho(t) > 0$  и  $\varphi(t)$  — непрерывные функции. Отметим, что, в отличие от  $\rho(t)$ , функция  $\varphi(t)$  задается неоднозначно, однако любые две такие функции  $\varphi$ , в силу требования непрерывности, отличаются на  $2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , и поэтому  $\varphi(T) - \varphi(0)$  не зависит от выбора  $\varphi$ . Более того, так как  $v(0) = v(T)$ , величина  $\varphi(T) - \varphi(0)$  равна  $2\pi n$  для некоторого  $n \in \mathbb{Z}$ . Число  $n_\gamma = n$  и называется количеством оборотов вектора  $v(t)$ .

Приведем явную формулу для числа вращения  $n_\gamma$ . Обозначим через  $v(t)$  единичный вектор скорости кривой  $\gamma$ , т.е.  $v = \dot{\gamma}/\|\dot{\gamma}\|$ . Тогда, как только что отмечалось,  $v(t) = (\cos \varphi(t), \sin \varphi(t))$  и число вращения  $n_\gamma$  может быть вычислено так:

$$n_\gamma = \frac{1}{2\pi} (\varphi(T) - \varphi(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^T \dot{\varphi}(t) dt.$$

Далее, обозначим через  $m(t)$  вектор  $v$ , повернутый на  $90^\circ$  против часовой стрелки:  $m(t) = (-\sin \varphi(t), \cos \varphi(t))$ . Умножая скалярно на  $m$  очевидное равенство  $\dot{v} = \dot{\varphi} m$  и учитывая, что вектор  $m$  — единичный, получим  $\dot{\varphi} = \langle \dot{v}, m \rangle$ , откуда

$$n_\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_0^T \langle \dot{v}, m \rangle dt.$$

**Задача 11.19.** Покажите, что при замене параметра на замкнутой регулярной кривой число вращения или остается тем же, если замена задается возрастающей функцией, или меняет знак, если функция замены убывающая.

Число вращения всех кривых на рис. 11.1, в зависимости от параметризации, равно  $\pm 1$ ; для левой кривой на рис. 11.2 это число также равно  $\pm 1$ , а для правой оно равно  $\pm 3$ . Оказывается, регулярно гомотопные замкнутые регулярные кривые — это в точности кривые с одинаковым числом вращения.

**Теорема 11.20** (Уитни, Грауштейн). *Две замкнутые регулярные кривые на плоскости регулярно гомотопны тогда и только тогда, когда их числа вращения совпадают.*

*Доказательство.* Пусть  $\gamma_s$ ,  $s \in [c, d]$ , — регулярная гомотопия, соединяющая  $\gamma_c$  и  $\gamma_d$ . Обозначим через  $n(s)$  число вращения кривой  $\gamma_s$ .

**Задача 11.21.** Покажите, что функция  $n(s)$  непрерывно зависит от  $s$ .

Так как  $n(s)$  принимает лишь целые значения, то, в силу задачи 11.21, функция  $n(s)$  постоянна, поэтому  $n(c) = n(d)$ . Таким образом, регулярно гомотопные кривые имеют одинаковые числа вращения.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть  $\gamma$  и  $\delta$  — замкнутые регулярные кривые с одинаковым числом вращения  $n$ . Применив к этим кривым сжатия-растяжения, добьемся того, чтобы их длины стали равны 1; при этом кривые заменятся на гомотопные (докажите!).

Следующая лемма поможет существенно упростить наши рассуждения.

**Лемма 11.22.** *Для любой регулярной кривой  $\gamma(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , существует возрастающая регулярная замена параметра  $t = \psi(\tau)$ , для которой вектор скорости кривой  $\gamma \circ \psi$  имеет единичную длину при всех  $\tau$  (такой параметр  $\tau$  называется **натуральным**).*

*Доказательство.* Положим  $\tau = \zeta(t) = \int_a^t \|\dot{\gamma}(\xi)\| d\xi$ , тогда, в силу того, что  $\|\dot{\gamma}(\xi)\| > 0$  при всех  $\xi$ , функция  $\zeta(t)$  строго монотонно возрастающая. Положим  $\psi = \zeta^{-1}$ , тогда

$$\frac{d(\gamma \circ \psi)}{d\tau} = \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{d\psi}{d\tau} = \frac{d\gamma}{dt} / \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|},$$

так что вектор скорости кривой  $\gamma \circ \psi$  имеет единичную длину при всех  $\tau$ , что и требовалось.  $\square$

**Задача 11.23.** Проверьте, что переход к натуральному параметру — допустимая замена параметризации замкнутой кривой. Покажите, что при натуральной параметризации период параметрического задания кривой равен ее длине.

Таким образом, без ограничения общности можно считать, что кривые  $\gamma$  и  $\delta$  параметризованы натуральным параметром  $t$ , причем период равен 1, поэтому  $\dot{\gamma}(t) = (\cos \varphi_\gamma(t), \sin \varphi_\gamma(t))$  и  $\dot{\delta}(t) = (\cos \varphi_\delta(t), \sin \varphi_\delta(t))$  для некоторых гладких функций  $\varphi_\gamma(t)$  и  $\varphi_\delta(t)$ .

Нам понадобится следующая техническая лемма (продумайте детали ее доказательства самостоятельно).

**Лемма 11.24.** Для любого  $t_0 \in (0, 1)$  существует регулярная деформация кривой  $\gamma(t)$  такая, что полученная в результате кривая  $\alpha(t)$  обладает следующими свойствами:

- (1) длина кривой  $\alpha$  равна длине кривой  $\gamma$ ;
- (2) параметр  $t$  является натуральным на  $\alpha$ ;
- (3) кривая  $\alpha$  периодична, так что ее период также равен 1;
- (4) если гладкая функция  $\varphi_\alpha$  определяется равенством

$$\dot{\alpha}(t) = (\cos \varphi_\alpha(t), \sin \varphi_\alpha(t)),$$

$$\text{то } \varphi'_\alpha(t_0) = 0.$$

*Идея доказательства.* На интервале  $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset (0, 1)$  заменим кривую  $\gamma$  на прямолинейный участок и сгладим возникшие углы так, чтобы полученная кривая  $\tilde{\gamma}$  стала регулярной (если  $\varepsilon$  достаточно мало, то это всегда можно сделать). При этом участки сглаживания выберем столь малыми, чтобы они лежали вне некоторого интервала  $(t_0 - \varepsilon', t_0 + \varepsilon')$ ,  $\varepsilon' < \varepsilon$ , а кривые  $\tilde{\gamma}|_{[0, t_0]}$  и  $\tilde{\gamma}|_{[t_0, 1]}$  оказались короче кривых  $\gamma|_{[0, t_0]}$  и

$\gamma|_{[t_0,1]}$  соответственно. Отметим, что для достаточно малых  $\varepsilon$  кривую  $\tilde{\gamma}$  можно всегда сделать регулярно гомотопной  $\gamma$ .

Теперь на участках  $(t_0 - \varepsilon', t_0 - \varepsilon'/2)$  и  $(t_0 + \varepsilon'/2, t_0 + \varepsilon')$  регулярно продеформируем кривые  $\tilde{\gamma}|_{[0,t_0]}$  и  $\tilde{\gamma}|_{[t_0,1]}$  так, чтобы их длины стали равны длинам кривых  $\gamma|_{[0,t_0]}$  и  $\gamma|_{[t_0,1]}$  соответственно (наглядно это выглядит как “выпускание языков”). Эти деформации оставляют  $\tilde{\gamma}$  регулярно гомотопной  $\gamma$ . При этом, если на полученной в результате кривой заменить параметр  $t$  на натуральный (мы его обозначим той же буквой  $t$ ), то построенная кривая может быть взята за  $\alpha$ .  $\square$

Из леммы 11.24 мгновенно выводится следующий важный результат.

**Следствие 11.25.** *В обозначениях леммы 11.24, выберем  $t_0 \in (0, 1)$  так, чтобы  $\varphi_\delta(t_0) \neq 0$  (такое  $t_0$  существует, так как кривая  $\delta$  регулярна и замкнута). Тогда функции  $\varphi_\alpha$ ,  $\varphi_\delta$  и 1 линейно независимы.*

*Доказательство.* Предположим противное, т.е. существуют не все равные нулю числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  такие, что  $a\varphi_\alpha + b\varphi_\delta + c = 0$ . Но тогда  $a\varphi'_\alpha(t_0) + b\varphi'_\delta(t_0) = 0$ , откуда  $b = 0$ . Так как ни  $\varphi_\alpha$ , ни 1 не равны тождественно нулю, оба коэффициента  $a$  и  $c$  отличны от нуля. Но тогда  $\varphi_\alpha$  постоянно, что противоречит регулярности и периодичности кривой  $\alpha$ .  $\square$

**Соглашение 11.26.** В силу следствия 11.25, мы можем сразу предполагать линейную независимость функций  $\varphi_\gamma$ ,  $\varphi_\delta$  и 1, что мы и будем делать.

Далее, положим  $\varphi(t, s) = (1 - s)\varphi_\gamma(t) + s\varphi_\delta(t)$  и построим однопараметрическое семейство единичных векторов

$$v_s(t) = (\cos \varphi(t, s), \sin \varphi(t, s)).$$

Отметим, что равенство чисел вращения исходных кривых обеспечивает 1-периодичность функции  $v_s(t)$  для всех  $s$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \varphi(t + 1, s) &= (1 - s)\varphi_\gamma(t + 1) + s\varphi_\delta(t + 1) = \\ &= (1 - s)(\varphi_\gamma(t) + 2\pi n_\gamma) + s(\varphi_\delta(t) + 2\pi n_\delta) = \\ &= \varphi(t, s) + 2\pi((1 - s)n_\gamma + sn_\delta) = \varphi(t, s) + 2\pi n. \end{aligned}$$

Положим  $\gamma_s(0) = (1-s)\gamma(0) + s\delta(0)$  и построим семейство  $\gamma_s(t)$  регулярных натурально параметризованных кривых с векторами скорости  $v_s(t)$  по следующей формуле:

$$\gamma_s(t) = \gamma_s(0) + \int_0^t v_s(\xi) d\xi.$$

Заметим, что  $\gamma_0 = \gamma$  и  $\gamma_1 = \delta$ , так что если все кривые  $\gamma_s$  замкнуты, то семейство  $\gamma_s$  и есть искомая гомотопия. Однако, как было показано в предложении 11.14, для замкнутости кривых  $\gamma_s(t)$  необходимо и достаточно, чтобы координатные функции для  $v_s(t)$  имели нулевое среднее. В нашем случае это, вообще говоря, не выполняется (постройте соответствующий пример). Чтобы исправить такое положение, мы переопределим кривые  $\gamma_s$ , положив

$$\gamma_s(t) = \gamma_s(0) + \int_0^t v_s(\xi) d\xi - t \cdot \int_0^1 v_s(\xi) d\xi.$$

Тогда

$$\gamma_s(1) - \gamma_s(0) = \int_0^1 v_s(\xi) d\xi - 1 \cdot \int_0^1 v_s(\xi) d\xi = 0,$$

так что все кривые  $\gamma_s$  замкнуты.

Покажем, что  $\gamma_0 = \gamma$  и  $\gamma_1 = \delta$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \gamma_0(t) &= \gamma(0) + \int_0^t \dot{\gamma}(\xi) d\xi - t \cdot \int_0^1 \dot{\gamma}(\xi) d\xi = \\ &= \gamma(0) + \gamma(t) - \gamma(0) - t(\gamma(1) - \gamma(0)) = \gamma(t), \end{aligned}$$

где последнее равенство имеет место в силу замкнутости кривой  $\gamma$ . Аналогично доказывается равенство  $\gamma_1 = \delta$ .

Далее, если при каждом  $s$  кривая  $\gamma_s$  регулярна, то  $\gamma_s$  — искомая гомотопия. Выясним, какие имеются препятствия к регулярности всех  $\gamma_s$ . По определению, регулярность  $\gamma_s$  означает, что при всех  $t$  выполняется

$$\dot{\gamma}_s(t) = v_s(t) - \int_0^1 v_s(\xi) d\xi \neq 0.$$

Если мы добьемся того, чтобы длина вектора  $w_s = \int_0^1 v_s(\xi) d\xi$  была строго меньше 1 при каждом  $s$ , то регулярность будет достигнута, так как  $\|v_s(t)\| = 1$  при всех  $s$  и  $t$ .

Условие  $\|w_s\| < 1$  равносильно тому, что для каждого единичного вектора  $e$  выполняется  $\langle w_s, e \rangle < 1$ . В силу линейной зависимости

интеграла от подынтегральной функции, имеем

$$\langle w_s, e \rangle = \left\langle \int_0^1 v_s(\xi) d\xi, e \right\rangle = \int_0^1 \langle v_s(\xi), e \rangle d\xi \leq \int_0^1 d\xi = 1,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда функция  $v_s(t)$  параметра  $t$  постоянна и равна  $e$ . Это, в свою очередь, выполняется тогда и только тогда, когда функция  $\varphi(t, s) = (1-s)\varphi_\gamma(t) + s\varphi_\delta(t)$  не зависит от  $t$ , однако последнее означает, что функции  $\varphi_\gamma$ ,  $\varphi_\delta$  и 1 линейно зависимы — получили противоречие с соглашением 11.26.

Таким образом,  $\langle w_s, e \rangle < 1$  для любого  $e$  при всех  $s$ , поэтому всегда  $\|w_s\| < 1$ , так что  $v_s(t) - w_s \neq 0$ . Итак,  $\gamma_s$  — замкнутые регулярные кривые при всех  $s$ . Доказательство закончено.  $\square$

### 11.3 Число вращения и точки самопересечения

Как уже отмечалось, число точек самопересечения кривой может меняться при регулярной гомотопии. Тем не менее, связь между числом вращения кривой и наличием на ней самопересечений все же имеется. Выясним сперва, как обстоит дело в случае отсутствия на кривой точек самопересечения.

**Теорема 11.27 (Хопф).** *Число вращения замкнутой несамопересекающейся регулярной кривой  $\gamma(t)$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$  равно  $\pm 1$ .*

*Доказательство.* Как и в доказательстве теоремы Уитни–Грауштейна, без ограничения общности будем считать параметр  $t$  кривой  $\gamma(t)$  натуральным и меняющимся на отрезке  $[0, 1]$ . Рассмотрим на плоскости с координатами  $t, s$  прямоугольный треугольник  $D = \{(t, s) \mid 0 \leq t \leq s \leq 1\}$ , и каждой точке  $(t, s)$  этого треугольника сопоставим единичный вектор  $e(t, s)$  по следующему правилу: если точка  $(t, s)$  не лежит на гипотенузе  $t = s$  и не совпадает с вершиной  $(0, 1)$ , то положим

$$e(t, s) = \frac{\gamma(s) - \gamma(t)}{\|\gamma(s) - \gamma(t)\|}.$$

Отметим, что функция  $e(t, s)$  гладкая, так как кривая несамопересекающаяся, а, значит,  $\gamma(t) \neq \gamma(s)$  при описанных выше ограничениях на  $t$  и  $s$ .

Заметим теперь, что при каждом фиксированном  $t < 1$  и  $s \rightarrow t+$ , а также при каждом фиксированном  $s > 0$  и  $t \rightarrow s-$  выполняется

$$\begin{aligned} e(t, s) &= \frac{\gamma(s) - \gamma(t)}{\|\gamma(s) - \gamma(t)\|} = \frac{\gamma(s) - \gamma(t)}{\|\gamma(s) - \gamma(t)\|} \cdot \frac{|s - t|}{s - t} = \\ &= \frac{\gamma(s) - \gamma(t)}{s - t} : \left\| \frac{\gamma(s) - \gamma(t)}{s - t} \right\| \rightarrow \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} = \dot{\gamma}(t), \end{aligned}$$

поэтому функция  $e(t, s)$  продолжается по непрерывности на гипотенузу  $t = s$  треугольника  $D$  по формуле  $e(t, t) = \dot{\gamma}(t)$ .

Далее, при  $s \rightarrow 1-$  и  $t \rightarrow 0+$  имеем

$$\begin{aligned} e(t, s) &= \frac{\gamma(s) - \gamma(t)}{\|\gamma(s) - \gamma(t)\|} = \\ &= \frac{\gamma(1) + \dot{\gamma}(1)(s - 1) + o(s - 1) - \gamma(0) - \dot{\gamma}(0)t + o(t)}{\|\gamma(1) + \dot{\gamma}(1)(s - 1) + o(s - 1) - \gamma(0) - \dot{\gamma}(0)t + o(t)\|} = \\ &= \frac{-\dot{\gamma}(1)(1 - s + t) + o(1 - s + t)}{\|-\dot{\gamma}(1)(1 - s + t) + o(1 - s + t)\|} = \\ &= \frac{-\dot{\gamma}(1)(1 - s + t) + o(1 - s + t)}{1 - s + t} \Big/ \frac{\|-\dot{\gamma}(1)(1 - s + t) + o(1 - s + t)\|}{|1 - s + t|} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{-\dot{\gamma}(1)}{\|-\dot{\gamma}(1)\|} = -\dot{\gamma}(1) = -\dot{\gamma}(0), \end{aligned}$$

поэтому функция  $e(t, s)$  продолжается по непрерывности в вершину  $(0, 1)$  треугольника  $D$  по формуле  $e(0, 1) = -\dot{\gamma}(0) = -\dot{\gamma}(1)$ .

Итак, мы определили функцию  $e(t, s)$  на всем треугольнике  $D$ , причем все векторы  $e(t, s)$  — единичные, поэтому вектор  $e(t, s)$  можно записать в виде  $e(t, s) = (\cos \varphi(t, s), \sin \varphi(t, s))$ , где функция  $\varphi(t, s)$  непрерывна в треугольнике  $D$ . Число вращения  $n_\gamma$  кривой  $\gamma$  — это число оборотов вектора  $e(t, t) = \dot{\gamma}(t)$  при изменении  $t$  вдоль гипотенузы треугольника  $D$ , т.е.

$$n_\gamma = \frac{1}{2\pi}(\varphi(1, 1) - \varphi(0, 0)).$$

С другой стороны, то же число можно получить, проходя по двум катетам:

$$2\pi n_\gamma = (\varphi(1, 1) - \varphi(0, 1)) + (\varphi(0, 1) - \varphi(0, 0)).$$

Вычислим соответствующие изменения угла  $\varphi$ . Разность  $\varphi(1, 1) - \varphi(0, 1)$  — это угол поворота, при изменении  $t$  от 0 до 1, направления вектора



$\gamma(1) - \gamma(t) = \gamma(0) - \gamma(t)$ , дополненного  $-\dot{\gamma}(0)$  при  $t = 0$  и  $\dot{\gamma}(1)$  при  $t = 1$ . Рассмотрим прямую  $\ell$ , касающуюся кривой  $\gamma$  и такую, что  $\gamma$  целиком лежит в одной полуплоскости, ограниченной этой прямой (докажите, что такая прямая существует). Будем считать, что значение параметра  $t = 0$  соответствует точке касания прямой  $\ell$  с кривой  $\gamma$  (см. рис. 11.3); тогда  $\varphi(1, 1) - \varphi(0, 1) = \pm\pi$ , причем знак совпадает со знаком числа вращения. Аналогично, разность  $\varphi(0, 1) - \varphi(0, 0)$  — это угол поворота направления вектора  $\gamma(s) - \gamma(0)$  при изменении  $s$  от 0 до 1, также дополненного соответствующими векторами скорости в концах кривой; этот угол тоже равен  $\pm\pi$ , причем, поскольку противоположные векторы вращаются в одну сторону, знак снова совпадает со знаком числа вращения. Тем самым доказано, что число вращения  $n_\gamma$  равно  $\pm 1$ .

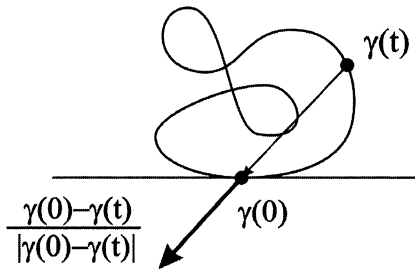


Рис. 11.3: Вращение направления вектора  $\gamma(0) - \gamma(t)$

□

## 11.4 Число Уитни. Теорема Уитни

Оказывается, если точки самопересечения считать с правильными знаками, получится число, связанное с числом вращения. А именно, пусть  $\gamma$  — замкнутая регулярная кривая, имеющая лишь конечное число точек самопересечения, причем все они двойные (т.е. степени всех вершин соответствующего графа равны четырем) и в каждой такой точке векторы скорости к пересекающимся дугам образуют ненулевой и не равный  $\pi$  угол. Про такие кривые будем говорить, что они *находятся в общем положении*. Будем двигаться вдоль такой кривой, стартуя с точки  $x_0$ , и каждый раз, встречая точку самопересечения, отмечать в этой точке направление вектора скорости. После обхода кривой в каждой точке самопересечения возникнет репер  $e_1, e_2$ , где вектор  $e_1$  соответствует первому посещению этой точки, а  $e_2$  — второму. Если

вращение от вектора  $e_1$  к вектору  $e_2$  через меньший угол происходит по часовой стрелке, припишем точке самопересечения число  $\varepsilon = +1$ , если же против часовой стрелки — число  $\varepsilon = -1$ .

**Определение 11.28.** В сделанных выше предположениях, *числом Уитни*  $W(\gamma, x_0)$  кривой  $\gamma$  называется сумма по всем точкам самопересечения приписанных им по сформулированному только что правилу чисел  $\varepsilon_j$ :

$$W(\gamma, x_0) = \sum_j \varepsilon_j.$$

**Замечание 11.29.** Число Уитни, как и число вращения, меняет знак при замене параметризации, заданной убывающей функцией, т.е. при изменении направления обхода. Кроме того, число Уитни зависит от выбора начальной точки  $x_0$ .

**Задача 11.30.** Пусть точка  $x_0$  не лежит на плоской замкнутой кривой  $\gamma(t)$ , тогда число оборотов вектора  $\gamma(t) - x_0$  называется *индексом точки  $x_0$  относительно кривой  $\gamma(t)$* . Пусть  $x_0$  — точка плоской замкнутой регулярной кривой  $\gamma$ , не являющаяся точкой самопересечения. Круг малого радиуса с центром в точке  $x_0$  делится кривой  $\gamma$  на две области. Докажите, что индексы точек в этих областях относительно кривой  $\gamma$  отличаются на единицу. У каких точек индекс больше? Полусумма этих двух чисел называется *индексом точки  $x_0$  относительно кривой  $\gamma$*  и обозначается через  $\text{ind}_\gamma(x_0)$ . Очевидно, это число полуцелое.

**Задача 11.31.** Докажите теорему Уитни:

$$W(\gamma, x_0) = n_\gamma - 2 \text{ind}_\gamma(x_0)$$

(в частности, разность  $W(\gamma, x_0) - n_\gamma$  всегда нечетна).

## Литература к главе 11

- [1] Прасолов В.В. *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии*. М.: МЦНМО, 2004.
- [2] Whitney H. *On regular curves in the plane*. *Composito Mathematica*, 1937, v. 4, 276–284.

## Упражнения к главе 11

**Упражнение 11.1.** Докажите, что для любой непрерывной непостоянной периодической функции существует минимальный положительный период. Постройте пример непостоянной периодической функции, для которой не существует минимального положительного периода.

**Упражнение 11.2.** Докажите, что для любых  $T$ -периодической функции  $f(x)$  и произвольной функции  $g(x)$ , определенных на вещественной прямой  $\mathbb{R}$ , их композиция  $g(f(x))$  является  $T$ -периодической функцией.

**Упражнение 11.3.** Докажите, что производная от дифференцируемой  $T$ -периодической функции — тоже  $T$ -периодическая функция.

**Упражнение 11.4.** Постройте регулярную гомотопию

- (1) окружности и эллипса;
- (2) эллипса и овала  $\frac{x_1^4}{a_1^4} + \frac{x_2^4}{a_2^4} = 1$

для соответствующих регулярных параметризаций этих кривых.

**Упражнение 11.5.** Покажите, что отношение гомотопности является эквивалентностью на каждом рассмотренном выше классе кривых (непрерывных, гладких, регулярных кривых, замкнутых или нет). Покажите также, что возрастающая замена параметра, а также смещение начальной точки в случае замкнутой кривой, приводят к кривым, гомотопным исходной (опять же, в каждом классе рассматриваемых кривых).

**Упражнение 11.6.** Покажите, что при замене параметра на замкнутой регулярной кривой число вращения или остается тем же, если замена задается возрастающей функцией, или меняет знак, если функция замены убывающая. Покажите также, что при смещении начала замкнутой регулярной кривой число вращения не меняется.

**Упражнение 11.7.** Проверьте, что переход к натуральному параметру — допустимая замена параметризации замкнутой кривой.

**Упражнение 11.8.** Для каждого целого  $n$  приведите пример плоской замкнутой регулярной кривой с числом вращения, равным  $n$ .

**Упражнение 11.9.** Вычислите число вращения кривой

- (1)  $\gamma(t) = \left(\frac{1}{2} \cos t, \sin t\right)$ ;

$$(2) \gamma(t) = (2 \cos t, -\sin t);$$

$$(3) \gamma(t) = (\cos t, \sin 2t),$$

где  $t$  меняется на отрезке  $[0, 2\pi]$ .

**Упражнение 11.10.** Пусть точка  $x_0$  не лежит на плоской замкнутой кривой  $\gamma(t)$ , тогда число оборотов вектора  $\gamma(t) - x_0$  называется *индексом точки  $x_0$  относительно кривой  $\gamma(t)$* . Нарисуйте замкнутые регулярные кривые с числом вращения 1 и 0 и вычислите индексы всех точек плоскости относительно этих кривых.

**Упражнение 11.11.** Пусть  $x_0$  — точка плоской замкнутой регулярной кривой  $\gamma$ , не являющаяся точкой самопересечения. Круг малого радиуса с центром в точке  $x_0$  делится кривой  $\gamma$  на две области. Докажите, что индексы точек в этих областях относительно кривой  $\gamma$  отличаются на единицу. У каких точек индекс больше?

**Упражнение 11.12.** Определите замкнутые регулярные кривые на сфере. Докажите, что на сфере любая замкнутая регулярная кривая регулярно гомотопна окружности или восьмерке.

**Упражнение 11.13.** Определите замкнутые регулярные кривые на цилиндре. Определите для них аналог числа вращения. Сформулируйте и докажите аналог теоремы Уитни—Грауштейна на цилиндре.

## Глава 12

# Двумерные поверхности

**План.** Стандартные симплексы, криволинейные симплексы, триангулируемая поверхность в евклидовом пространстве, триангуляция поверхности, край стандартного симплекса, край криволинейного симплекса, край триангулируемой поверхности, ориентация стандартного симплекса, ориентация криволинейного симплекса, ориентация триангулируемой поверхности, гомеоморфизм поверхностей, склейки из квадрата, цилиндр, тор, бутылка Клейна, проективная плоскость, вырезание и заклейка дырки, вклейка ручки, вклейка пленки Мёбиуса, классификация двумерных поверхностей.

Ниже рассматриваются двумерные поверхности в евклидовом пространстве; наша цель — классификация таких поверхностей с точностью до “непрерывной деформации”. Прежде всего, надо определить, что мы понимаем под двумерной поверхностью; существует два разных подхода к этому определению. В любом случае, сперва необходимо описать ситуацию локально, т.е. в малой окрестности произвольной точки. То обстоятельство, что поверхность двумерна, означает, что любой достаточно малый ее кусок может быть задан параметрическими уравнениями  $x = r(u)$ , где  $u = (u_1, u_2)$  — параметры (координаты на поверхности), меняющиеся в некоторой области на плоскости. Один из подходов к определению поверхности состоит в том, что она представляется как объединение кусков, каждый из которых задается такими уравнениями, причем считается, что координаты  $u$  меняются в открытом множестве (например, в круге). В пересечении двух таких кусков возникают две системы координат; требуется, чтобы одни координаты выражались через другие посредством непрерывных (или гладких) функций. Такой подход — “наложение кусков друг на друга” — лежит в основе определения топологического (или гладкого) многообразия; на нем основана, в частности, классическая дифференциальная геометрия многообразий.

Для нас удобнее будет представлять поверхность как объединение стандартных кусков, стыкующихся друг с другом по участку границы.

Начнем с определения стандартного куска; сперва опишем множество, в котором меняются координаты.

**Определение 12.1.** *Стандартным двумерным симплексом* называется (замкнутый) треугольник на плоскости.

**Замечание 12.2.** Ясно, что для всякого симплекса можно так выбрать систему координат на плоскости, что симплекс будет задаваться соотношениями

$$u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \quad u_1 + u_2 \leq 1.$$

Для этого достаточно поместить начало координат в одну из рассматриваемых точек (вершин симплекса) и направить базисные векторы из нее в остальные вершины.

**Замечание 12.3.** У каждого симплекса есть *одномерные грани* — стороны треугольника и *нульмерные грани* — его вершины. Стороны задаются одним из уравнений вида  $u_j = 0$  или  $\sum_j u_j = 1$ .

Определим теперь криволинейный симплекс — образ стандартного симплекса при гладком отображении.

**Определение 12.4.** *Криволинейным двумерным симплексом в евклидовом пространстве* называется множество, которое можно задать параметрически в виде

$$x = r(u_1, u_2),$$

где координаты  $u = (u_1, u_2)$  пробегают стандартный симплекс, а все координаты  $x_i(u)$  вектора  $r(u)$  — гладкие функции в этом стандартном симплексе, причем векторы  $\partial r / \partial u_i$  линейно независимы во всех его точках. Требуется, кроме того, чтобы заданное такой формулой отображение между точками стандартного и криволинейного симплексов было взаимно-однозначным, т.е. из равенства  $r(u) = r(v)$  должно следовать, что  $u = v$  (последнее условие, очевидно, означает, что криволинейный симплекс не имеет точек самопересечения).

**Замечание 12.5.** У каждого криволинейного симплекса есть *одномерные* и *нульмерные грани* — они задаются теми же уравнениями  $x = r(u)$ , причем координаты  $u$  пробегают соответствующую грань стандартного симплекса.

Теперь мы можем определить наш основной геометрический объект — триангулируемую поверхность. Это — множество, правильным образом составленное из криволинейных симплексов.

**Определение 12.6.** *Триангулируемая поверхность в евклидовом пространстве* — это множество, представимое в виде объединения конечного числа криволинейных симплексов. При этом требуется, чтобы

- (1) пересечение любых двух входящих в это множество симплексов было либо пустым множеством, либо ровно одной целой гранью (размерности 0 или 1) для обоих пересекающихся симплексов;
- (2) по каждой одномерной грани может пересекаться не более двух симплексов;
- (3) если два симплекса  $P$  и  $Q$  пересекаются по вершине, то существуют содержащие эту вершину симплексы  $M_1, \dots, M_N$ ,  $M_1 = P$ ,  $M_N = Q$  такие, что при каждом  $j < N$  симплексы  $M_j$  и  $M_{j+1}$  имеют общую сторону.

*Триангуляцией поверхности* называется ее представление в виде такого объединения криволинейных симплексов.

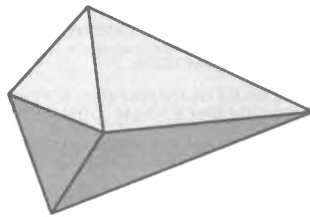


Рис. 12.1: Разрешенное пересечение симплексов

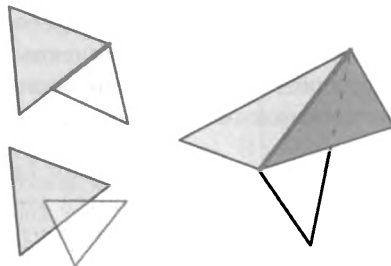


Рис. 12.2: Запрещенные пересечения симплексов

**Замечание 12.7.** Таким образом, *триангулируемая поверхность* состоит из конечного числа криволинейных треугольников, причем пересечение треугольников возможно либо по одной целой стороне, либо по одной вершине. Дополнительные условия, наложенные на пересечения, гарантируют, в частности, следующее свойство (докажите!): пересечение поверхности с замкнутым шаром достаточно малого радиуса с центром в произвольной ее точке гомеоморфно диску (кругу на плоскости).

## 12.1 Край триангулируемой поверхности

Определенные выше поверхности, вообще говоря, имеют край (например, край диска — это окружность, а край цилиндра — две окружности).

**Определение 12.8.** *Краем стандартного симплекса* называется объединение его одномерных граней (граница треугольника); аналогично, *краем криволинейного симплекса* называется объединение образов этих граней при соответствующем отображении, т.е. множество, заданное параметрическими уравнениями  $x = r(u)$ , в которых координаты  $u$  пробегают край стандартного симплекса.

**Замечание 12.9.** Край криволинейного симплекса — это замкнутая цепочка из трех криволинейных отрезков.

Наконец, определим край триангулируемой поверхности. Для этого рассмотрим края всех входящих в нее криволинейных симплексов. Все вместе они составляют набор конечного числа криволинейных отрезков (граней симплексов). Для каждой такой грани возможны две ситуации: либо она принадлежит двум разным симплексам (являясь их пересечением), либо только одному. В первом случае назовем криволинейный отрезок *внутренним*, а во втором — *краевым*.

**Определение 12.10.** *Краем триангулируемой поверхности* называется объединение ее краевых одномерных граней.

**Задача 12.11.** Докажите, что край любой поверхности — это объединение нескольких замкнутых цепочек криволинейных отрезков.

**Определение 12.12.** Каждая такая цепочка называется *компонентой края*.



## 12.2 Ориентация триангулируемых поверхностей

Поверхности различаются по их ориентируемости; определим сперва это понятие для симплексов.

**Определение 12.13.** Стандартный симплекс называется *ориентированным*, если задано направление обхода его края. Другими словами, на каждой стороне треугольника должно быть указано направление, причем в каждой вершине встречаются одно входящее и одно выходящее направления.

**Замечание 12.14.** Пусть вершины симплекса занумерованы; тогда ориентация задается перестановкой из трех чисел (номеров вершин), причем две перестановки задают одну и ту же ориентацию тогда и только тогда, когда их четности совпадают.

**Замечание 12.15.** Фактически, задание ориентации — это выбор одного из двух направлений вращения — “по часовой стрелке”, или “против часовой стрелки”.

**Определение 12.16.** Криволинейный симплекс называется *ориентированным*, если задана ориентация соответствующего стандартного симплекса. Другими словами, на крае криволинейного симплекса должно быть задано направление обхода.

Рассмотрим теперь триангулируемую поверхность. Ее ориентация получается из ориентации входящих в нее симплексов, при условии правильного согласования ориентаций на их пересечениях.

**Определение 12.17.** Триангулируемая поверхность называется *ориентированной*, если на каждом входящем в нее криволинейном симплексе задана ориентация, причем если два симплекса пересекаются по одномерной грани, то два направления, индуцированные на этой грани ориентациями двух пересекающихся симплексов, должны быть **противоположными**.

**Замечание 12.18.** Легко понять, что условие противоположности ориентаций, индуцированных на грани двумя пересекающимися по этой грани симплексами, означает “непрерывность” ориентации при переходе через грань из одного симплекса в другой (направление вращения при переходе не меняется).

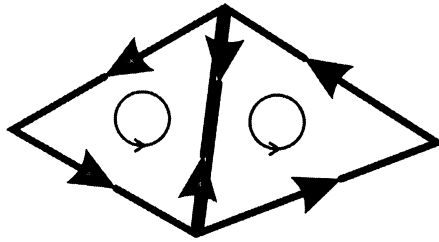


Рис. 12.3: Согласование ориентации симплексов

**Определение 12.19.** Поверхность называется *ориентируемой*, если на ней существует ориентация.

**Замечание 12.20.** Рассмотрим на поверхности *замкнутую цепочку симплексов*, т.е. набор криволинейных треугольников  $M_1, \dots, M_N$ , каждый из которых пересекается по одномерной грани с последующим и с предыдущим, причем  $M_1$  пересекается с  $M_N$ . Зададим ориентацию на первом симплексе  $M_1$ ; правило согласования однозначно определяет ориентацию на симплексе  $M_2$ , от него — на  $M_3$  и далее по цепочке до  $M_N$ , а от него снова на  $M_1$ . Таким образом, на первом симплексе возникает две ориентации. Будем говорить, что замкнутая цепочка симплексов *сохраняет ориентацию*, если эти две ориентации совпадают, и *обращает ориентацию*, если они противоположны. Ясно, что, если на поверхности существует обращающая ориентацию цепочка симплексов, то поверхность неориентируема; легко проверить (докажите!), что верно и обратное утверждение. Таким образом, ориентируемость поверхности эквивалентна отсутствию на ней обращающих ориентацию замкнутых цепочек симплексов.

**Замечание 12.21.** Нетрудно убедиться (докажите!), что ориентируемость двумерной поверхности *в трехмерном пространстве* обеспечивается, в частности, следующим свойством. Предположим, что криволинейные симплексы склеиваются достаточно гладко, т.е. что в каждой точке произвольной грани предел плоскостей, натянутых на векторы  $\partial r / \partial u_j$  — касательные векторы к координатным линиям — одинаков для всех пересекающихся по данной грани симплексов. Выберем в каждой точке поверхности один из двух единичных векторов, перпендикулярных этой плоскости (вектор нормали к поверхности). Ори-

ентируемость поверхности эквивалентна существованию *непрерывного* семейства таких векторов во всех точках поверхности.

**Замечание 12.22.** Не любая триангулируемая поверхность может быть ориентируема. Действительно, рассмотрим прямоугольник и склеим две его противоположные стороны, закрутив их так, чтобы стрелки совпали (рис. 12.4).

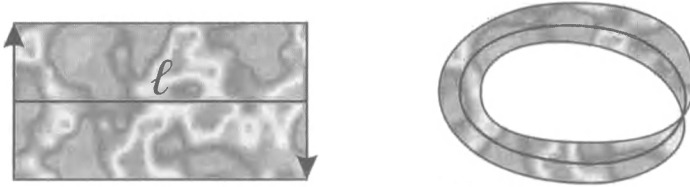


Рис. 12.4: Пленка Мёбиуса

Получим поверхность, называемую *пленкой Мёбиуса*. Ясно, что на этой поверхности не существует ориентации; действительно, рассмотрим единичную нормаль к ней в точке средней линии (рис. 12.5) и непрерывно двигая ее вдоль этой замкнутой кривой, придем в конце концов в исходную точку, причем направление нормали поменяется на противоположное.

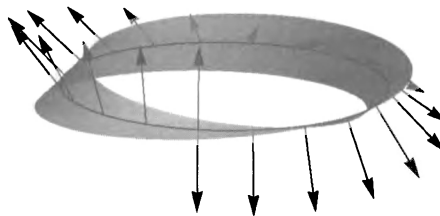


Рис. 12.5: При перемещении нормали к листу Мёбиуса вдоль средней линии направление нормали меняется на противоположное

**Задача 12.23.** Предъявите на пленке Мёбиуса цепочку симплексов, обращающую ориентацию.

## 12.3 Гомеоморфизм поверхностей

Наша цель — классифицировать двумерные поверхности; для этого надо выяснить, какие из них мы будем считать одинаковыми. Нас не будут интересовать ни размеры, ни форма поверхности; таким образом, допускаются любые деформации без разрывов. Это означает, что поверхности считаются одинаковыми, если они преобразуются друг в друга непрерывными взаимно однозначными отображениями. Определение непрерывности ничем не отличается от соответствующего понятия анализа (см. детали в главе 2).

**Определение 12.24.** Пусть  $f : M \rightarrow Q$  — отображение триангулируемой поверхности  $M$  в триангулируемую поверхность  $Q$ . Отображение  $f$  называется *непрерывным в точке*  $P \in M$ , если для любой окрестности  $V$  точки  $f(P) \in Q$  найдется окрестность  $U$  точки  $P$ , для которой  $f(U \cap M) \subset V$ . Отображение называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке.

**Определение 12.25.** Отображение  $f : M \rightarrow Q$  называется *гомеоморфизмом*, если  $f$  взаимно однозначно (тогда существует обратное отображение  $f^{-1}$ ) и  $f$  и  $f^{-1}$  непрерывны. Поверхности  $M$  и  $Q$  называются гомеоморфными, если существует гомеоморфизм  $f : M \rightarrow Q$ .

**Задача 12.26.** Докажите, что многоугольник гомеоморфен диску (закнутому кругу).

**Задача 12.27.** Докажите, что на любой триангулируемой поверхности существует граф, разбивающий ее на куски, гомеоморфные диску.

**Задача 12.28.** Докажите, что каждая компонента края двумерной поверхности гомеоморфна окружности (тем самым край гомеоморфен объединению нескольких окружностей).

## 12.4 Склейки из квадрата

Простейшие примеры двумерных поверхностей можно получить, склеивая по различным правилам стороны квадрата. Выше мы видели, как при такой склейке получается пленка Мёбиуса; остальные варианты склейки (см. рис. 12.6) приводят к поверхностям, называемым соответственно *цилиндром*, *тором*, *бутылкой Клейна* и *проективной плоскостью*.

**Задача 12.29.** Постройте триангуляции цилиндра, тора, проективной плоскости и бутылки Клейна.

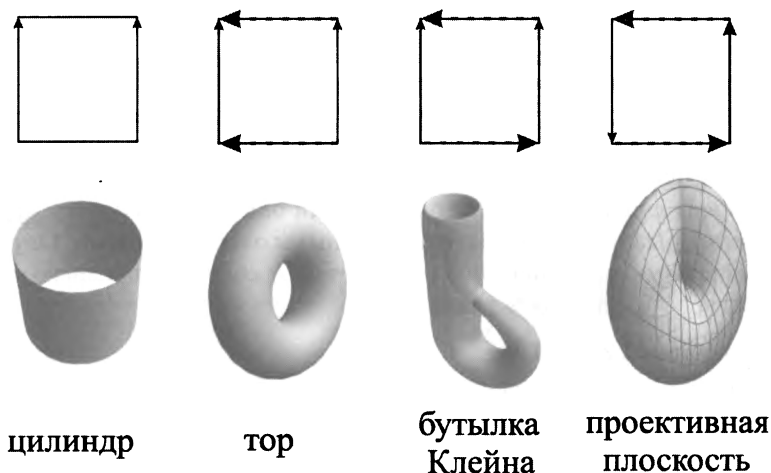


Рис. 12.6: Склейки из квадрата

**Задача 12.30.** Докажите, что цилиндр и тор ориентируемы, а проективная плоскость и бутылка Клейна — нет.

**Замечание 12.31.** Ясно, что край пленки Мёбиуса состоит из одной окружности, цилиндра — из двух, а у остальных поверхностей край пуст.

## 12.5 Основные операции

Для классификации двумерных поверхностей нам понадобится ряд операций с поверхностями, которые мы сейчас опишем.

### Вырезание и заклейка дырки

Удалим из поверхности ее пересечение с шаром достаточно малого радиуса, центр которого — точка поверхности, не принадлежащая краю. Получим новую поверхность, край которой содержит на одну окружность больше, чем край исходной поверхности. Эта операция называется *вырезанием дырки*, а обратная к ней — *заклейкой дырки диском*.

**Замечание 12.32.** Вырезание дырки эквивалентно удалению из поверхности одного внутреннего симплекса (т.е. симплекса, не пересекающегося с краем); заклейка дырки — присоединение к поверхности

многоугольника, стороны которого отождествляются с гранями симплексов, лежащими на некоторой выделенной компоненте края.

### Вклейка ручки

*Ручкой* называется поверхность, полученная из тора вырезанием дырки (рис. 12.7).

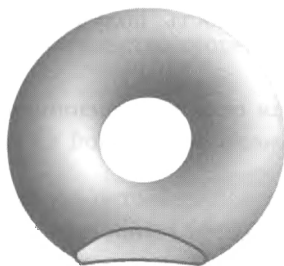


Рис. 12.7: Ручка

Вырежем в поверхности дырку и отождествим новую компоненту края (край вырезанного диска) с краем ручки. Такая операция называется *вклейкой ручки*.

### Вклейка пленки Мёбиуса

Вырежем в поверхности дырку и отождествим новую компоненту края с краем пленки Мёбиуса (напомним, что он состоит из одной окружности). Такая операция называется *вклейкой пленки Мёбиуса*.

**Задача 12.33.** Описать операции вклейки ручки и пленки Мёбиуса в терминах триангуляции поверхности (т.е. представить их как удаление или присоединение некоторого набора симплексов).

## 12.6 Классификация ориентируемых поверхностей

Наша цель — классифицировать двумерные поверхности с точностью до гомеоморфизма. Прежде всего отметим, что достаточно ограничиться поверхностями, “состоящими из одного куска”; такие поверхности называются связными.

**Определение 12.34.** Поверхность  $M$  называется *связной*, если любые две точки из  $M$  можно соединить непрерывной кривой, лежащей на  $M$ .

**Замечание 12.35.** Ясно, что на каждой связной поверхности существует связный граф, разбивающий ее на куски, гомеоморфные диску.

Начнем с классификации ориентируемых поверхностей без края. Обозначим через  $M_g$  поверхность, полученную из сферы приклейкой  $g$  ручек.

**Теорема 12.36.** *Каждая связная ориентируемая триангулируемая поверхность без края гомеоморфна одной из поверхностей  $M_g$ .*

*Доказательство.* Идея доказательства состоит в следующем. Пусть дана поверхность  $Q$ . Мы будем выполнять с этой поверхностью ряд операций (заменяющих ее на не гомеоморфную), в результате чего получится поверхность, гомеоморфная диску, т.е. сфере с вырезанной дыркой. Затем мы проследим, как восстанавливается по этой поверхности наша исходная поверхность  $Q$  и убедимся, что в процессе восстановления получается сфера, в которой вырезано несколько дырок и некоторые из них заклеены ручками. Вспоминая, что исходная поверхность края не имела, мы заключим, что свободных дырок в нашей поверхности  $Q$  нет, т.е. она получается из сферы приклейкой некоторого числа ручек.

Перейдем к реализации этой программы. Рассмотрим на  $Q$  связный граф  $\Gamma$ , разбивающий ее на конечное число областей, каждая из которых гомеоморфна диску. Окружим каждую вершину графа маленьким “кружком”, а каждое ребро заключим в узкую полоску, соединяющую построенные “кружки” (рис. 12.8). Другими словами, рассмотрим поверхность  $Q_\varepsilon$ , состоящую из точек  $P \in Q$ , находящихся от  $\Gamma$  на расстоянии, не большем  $\varepsilon$ ; здесь  $\varepsilon > 0$  — достаточно малое число.

Вырежем теперь из поверхности  $Q$  все оставшиеся куски областей (внутренности); каждый кусок гомеоморфен диску, так что эта процедура сводится к вырезанию в поверхности нескольких дырок, а обратная к ней — к заклеиванию дырок дисками.

Рассмотрим теперь получившуюся после такого удаления поверхность  $Q_\varepsilon$  — она состоит из кружков, окружающих вершины графа, соединенных ленточками, содержащими ребра. Рассмотрим в графе максимальное дерево и соответствующие перемычки. Каждую полоску, соответствующую перемычке, разрежем поперек; в результате получится новая поверхность  $\hat{Q}$  (рис. 12.9).

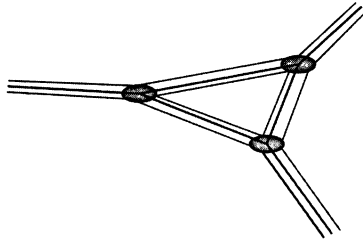


Рис. 12.8: Доказательство теоремы 12.36, шаг 1

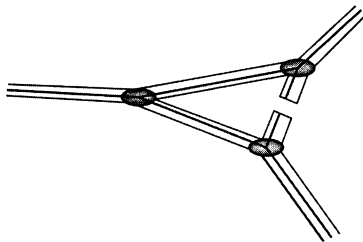


Рис. 12.9: Доказательство теоремы 12.36, шаг 2

Убедимся в том, что эта поверхность гомеоморфна диску. Действительно, максимальное дерево рассматриваемого графа можно строить, начиная с одного ребра, соединяющего две вершины, и добавляя каждый раз по одному ребру и одной вершине так, чтобы все время получалось дерево. Два кружка, соединенных полоской, очевидно, гомеоморфны диску; добавление полоски с кружком эквивалентно приклеиванию к диску прямоугольника по одной его стороне; в результате снова получается поверхность, гомеоморфная диску. Таким образом, получая на каждом шаге поверхность, гомеоморфную диску, мы построим максимальное дерево, окруженное полосками и кружками. Для того, чтобы получить поверхность  $\hat{Q}$ , осталось приклеить куски, образовавшиеся при разрезании перемычек. Каждый такой кусок гомеоморфен прямоугольнику, который приклеивается по одной стороне; при этом снова получается поверхность, гомеоморфная диску.

Итак, вырезав внутренности областей и разрезав полоски, соответствующие перемычкам, мы получили из  $Q$  поверхность, гомеоморфную диску. Посмотрим теперь, к чему приводит разрезание полосок и, главное, что представляет собой обратная процедура их склейки.



Рассмотрим произвольную полосу; пусть, разрезая ее, мы соединяем точки  $a$  и  $b$  на разных сторонах. Ясно, что эти точки лежат на крае поверхности  $Q_\varepsilon$  (край  $Q_\varepsilon$  состоит из границ полосок и кружков); при этом  $a$  и  $b$  могут лежать как на разных окружностях, образующих край, так и на одной.

Если они лежат на разных окружностях, разрезание по соединяющей две окружности дуге приводит к уменьшению на единицу числа дырок в поверхности (рис. 12.10); значит, обратный процесс склейки должен приводить к вырезанию одной дырки.

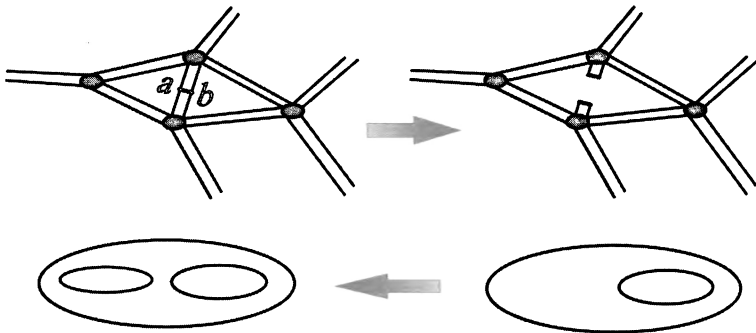


Рис. 12.10: Доказательство теоремы 12.36, шаг 3

Если точки  $a$  и  $b$  лежат на одной окружности, процесс разрезания можно представить себе следующим образом. Прежде всего, сдвинем точки  $a$  и  $b$  в одну точку на крае; тогда разрезать придется по замкнутой кривой, начинающейся и заканчивающейся на крае. Такую процедуру можно разбить на два этапа: сперва мы разрежем поверхность по замкнутой кривой  $q$ , не пересекающейся с краем, а затем соединим этот разрез с краем по дуге (рис. 12.11).

На втором этапе мы соединяем разрезом две точки, лежащие на разных окружностях, образующих край (одна из этих окружностей возникла при разрезании по замкнутой кривой); как мы видели выше, эта процедура сводится к заклеиванию дырки диском, а обратная — к вырезанию диска.

Наконец, осталось рассмотреть процедуру разрезания поверхности вдоль замкнутой кривой  $q$ , не пересекающейся с краем. Если мы заключим эту кривую в узкую полосу и вырежем эту полосу из нашей поверхности, вырезанный кусок будет гомеоморфен цилиндру. Действительно, если такую полосу разрезать поперек, ее можно будет

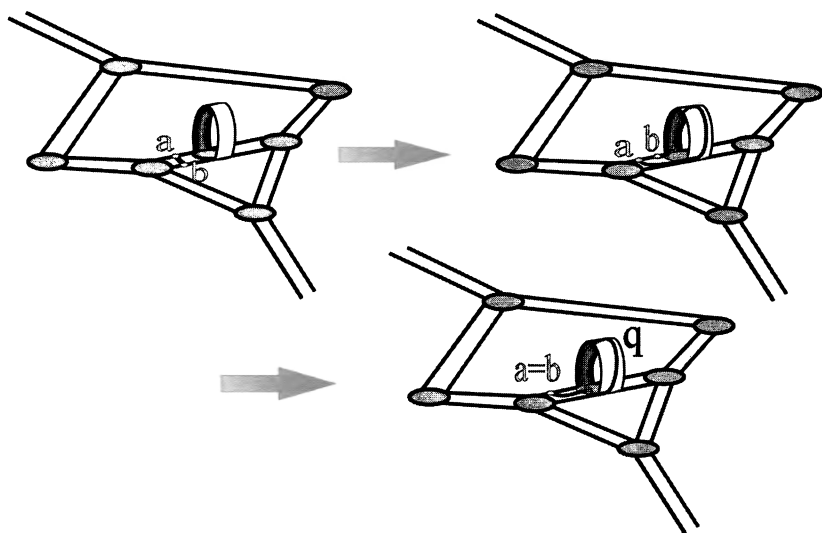


Рис. 12.11: Доказательство теоремы 12.36, шаг 4

распрямить в прямоугольник. При склеивании прямоугольника по двум противоположным сторонам получается либо цилиндр, либо лента Мёбиуса; последняя содержит цепочку симплексов, обращающую ориентацию, а таких в нашей поверхности быть не может (напомним, что  $Q$  предполагается ориентируемой). Итак, полоска, содержащая рассматриваемую замкнутую кривую  $q$ , гомеоморфна цилиндру, а ее разрезание по нашей кривой — разрезанию цилиндра по средней окружности, в результате чего он распадается на два (рис. 12.12).

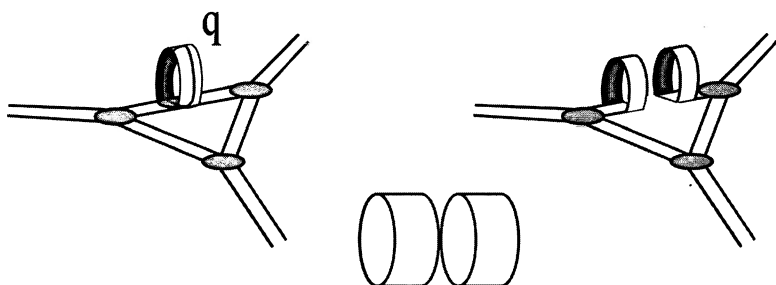


Рис. 12.12: Доказательство теоремы 12.36, шаг 5

После такого разрезания на поверхности появляются две новых окружности, входящих в край; склеивание вдоль нашей замкнутой кривой  $q$  эквивалентно склейке двух таких окружностей. Если при склейке направление обхода “против часовой стрелки” на одной окружности перейдет в такое же направление на другой, узкая полоска, соединяющая окружности, склеится в ленту Мёбиуса (рис. 12.13), что запрещено условием ориентируемости поверхности.

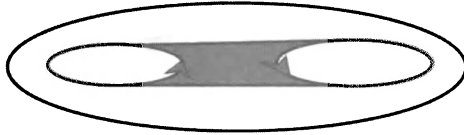


Рис. 12.13: Доказательство теоремы 12.36, шаг 6

Таким образом, направление “против часовой стрелки” на одной из склеиваемых окружностей соединяется с направлением “по часовой стрелке” на другой; такая операция эквивалентна приклейке ручки (рис. 12.14).

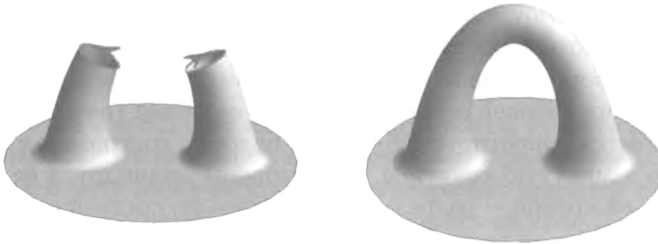


Рис. 12.14: Доказательство теоремы 12.36, шаг 7

Подведем итог. Исходная поверхность  $Q$  получается из поверхности  $\widehat{Q}$ , гомеоморфной диску, при помощи серии операций (склейка полосок, соответствующих перемычкам в графе, и приклейка внутренних областей), каждая из которых эквивалентна одной из следующих:

- а) вырезание дырки;
- б) заклеивание дырки диском;
- в) вклейка ручки.

Значит, поверхность  $Q$  гомеоморфна сфере с некоторым количеством дырок и некоторым количеством ручек. Отсутствие края гарантирует отсутствие дырок, поэтому  $Q$  гомеоморфна одной из поверхностей  $M_g$ .  $\square$

**Задача 12.37.** Проследить, в каких местах доказательства использовалась ориентируемость поверхности.

**Задача 12.38.** Проследить, в каких местах доказательства использовалось отсутствие края.

**Задача 12.39.** Обозначим через  $M_g^m$  поверхность, полученную из  $M_g$  вырезанием  $m$  дырок (сфера с  $g$  ручками и  $m$  дырками). Докажите, что любая связная ориентируемая триангулируемая поверхность с краем гомеоморфна одной из поверхностей  $M_g^m$ .

## 12.7 Классификация неориентируемых поверхностей

Из доказательства предыдущей теоремы видно, что, если отказаться от требования ориентируемости, в поверхности могут появиться куски, гомеоморфные пленке Мёбиуса. Оказывается, это единственный эффект неориентируемости, так что любая неориентируемая поверхность получается из сферы при помощи применения конечного числа основных операций, перечисленных в конце предыдущей лекции (вырезание дырки, заклейка дырки диском, вклейка ручки, вклейка пленки Мёбиуса). Более того, мы докажем, что в неориентируемом случае можно обойтись без ручек, так что главной операцией будет вклейка пленки Мёбиуса. Приведем новое удобное описание этой операции. Прежде, чем вклеивать пленку Мёбиуса в поверхность, разрежем ее по средней линии; получим поверхность, гомеоморфную цилиндру. Обратную склейку средней линии можно представлять себе как отождествление диаметрально противоположных точек одного из оснований цилиндра (рис. 12.15; на рисунке одинаковыми буквами обозначены точки, которые требуется отождествить). Тем самым вклейку пленки Мёбиуса в поверхность можно представлять себе следующим образом: сперва в поверхности вырезается дырка и в нее вклеивается цилиндр (одно из его оснований приклеивается к краю дырки), а затем на оставшемся основании цилиндра отождествляются диаметрально противоположные точки. Ясно, что вклейка цилиндра меняет поверхность на гомеоморфную (меняется только размер дырки);

таким образом, чтобы вклеить пленку Мёбиуса, надо вырезать в поверхности дырку и отождествить на возникшей компоненте края диаметрально противоположные точки.

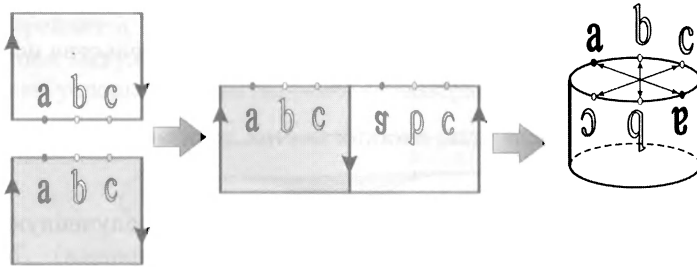


Рис. 12.15: Пленка Мёбиуса

**Задача 12.40.** Описать операцию отождествления диаметрально противоположных точек компоненты края поверхности в терминах триангуляции; убедиться, что при этом к поверхности присоединяется пленка Мёбиуса.

Теперь мы можем описать неориентируемые поверхности. Обозначим через  $N_k$  поверхность, полученную из сферы вклейкой  $k$  пленок Мёбиуса.

**Теорема 12.41.** Каждая связная неориентируемая триангулируемая поверхность без края гомеоморфна одной из поверхностей  $N_k$ .

*Доказательство.* Будем действовать по тому же плану, что и при доказательстве предыдущей теоремы; легко понять, что ориентируемость поверхности в этом доказательстве используется в двух местах, причем оба относятся к операции вырезания из поверхности ленточной окрестности замкнутой кривой (и к обратной операции вклейки).

Во-первых, сама вырезаемая ленточка может быть гомеоморфна либо цилиндру, либо пленке Мёбиуса; в ориентируемом случае возможен только первый вариант, тогда как сейчас мы должны допустить и второй. Тем самым к перечисленным выше операциям (вырезание дырки, заклейка дырки диском, вклейка ручки), при помощи которых из сферы получается исходная поверхность  $Q$ , добавляется еще одна — вклейка пленки Мёбиуса.

Во-вторых, если ленточка все же гомеоморфна цилиндру, вклейка этого цилиндра в поверхность эквивалентна склейке краев двух дырок; эта склейка может осуществляться двумя различными способами,

причем, если направление обхода “против часовой стрелки” на одной окружности переходит в такое же направление на второй, получается неориентируемая поверхность. Нам осталось выяснить, что именно происходит при такой операции. Рассмотрим поверхность, в которой вырезаны две дырки, а затем края этих дырок склеены с учетом одинаковой ориентации на них. Представим эту процедуру следующим образом. Сперва разрежем поверхность по двум отрезкам, соединяющим края дырок; при этом из поверхности выпадет связный кусок. Вклеим этот кусок назад в поверхность, склеив сперва края дырок по нужному правилу (для этого кусок придется “вывернуть наизнанку”); в результате снова получим поверхность с двумя дырками (край каждой дырки — вновь проведенный разрез), но теперь требуется склеить диаметрально противоположные точки на краях дырок. Выше мы видели, что такая операция эквивалентна вклейке пленки Мёбиуса; таким образом, вклейка в поверхность нашего цилиндра эквивалентна приклеиванию к ней двух пленок Мёбиуса. На рис. 12.16 вырезаемый и вновь вклеиваемый кусок закрашен; одинаковыми буквами обозначены точки, которые требуется отождествить.

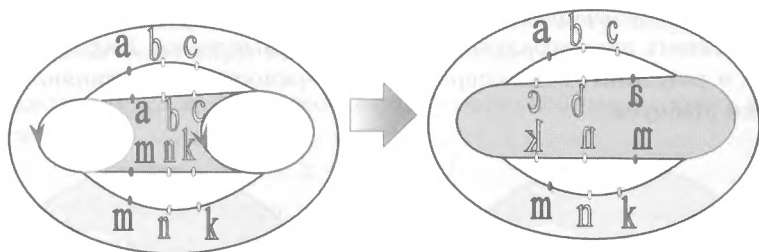


Рис. 12.16: Склейка двух дырок эквивалентна вклейке двух пленок Мёбиуса

Итак мы доказали, что любая поверхность получается из сферы при помощи четырех операций: вырезание дырки, заклейка дырки диском, вклейка ручки и и вклейка пленки Мёбиуса. В результате получится сфера с некоторым количеством дырок, ручек и пленок Мёбиуса. Поскольку мы рассматриваем поверхности без края, дырок быть не может; кроме того, поскольку поверхность неориентируема, хотя бы одна пленка Мёбиуса присутствует. Таким образом, наша поверхность гомеоморфна сфере с  $g \geq 0$  ручками и  $s \geq 1$  пленками Мёбиуса. Оказывается, такая поверхность гомеоморфна сфере, к которой прикле-

ено  $s + 2g$  пленок Мёбиуса (ручки приклеивать не надо). Другими словами, в присутствии хотя бы одной пленки Мёбиуса, любая ручка на поверхности эквивалентна двум пленкам Мёбиуса. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим на поверхности ручку и пленку Мёбиуса; напомним, что приклейка ручки эквивалентна вырезанию двух дырок и последующей склейке их краев с учетом противоположной ориентации, а приклейка пленки Мёбиуса — вырезанию дырки и последующему отождествлению диаметрально противоположных точек ее края. Вырежем сперва все три дырки и затем разрежем поверхность по кривой, соединяющей точки на краю дырки, отвечающей пленке Мёбиуса; при этом кривая должна охватывать одну из двух дырок, отвечающих ручке. Из поверхности выпадет связный кусок; вклеим его назад так, чтобы совпали диаметрально противоположные точки на крае дырки, соответствующей пленке Мёбиуса (для этого вырезанный кусок надо “вывернуть наизнанку”). В результате на поверхности образуются три дырки — две были изначально и соответствовали ручке, а третья образовалась из вновь проведенного разреза. Края этих дырок надо склеить следующим образом: две бывшие ранее дырки склеить по краю с учетом *одинаковой ориентации* (направление изменилось в результате переворачивания вырезанного куска) и на крае третьей отождествить диаметрально противоположные точки. Как мы видели выше, в результате этих операций к поверхности присоединяются три пленки Мёбиуса.

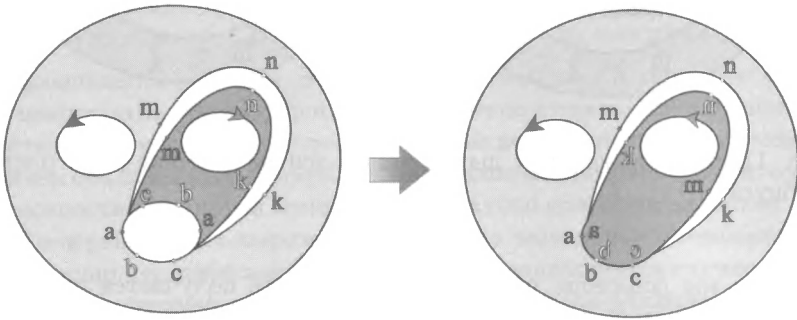


Рис. 12.17: Замена ручки на две пленки Мёбиуса

□

**Задача 12.42.** Сформулируйте и докажите теорему классификации неориентируемых поверхностей с краем.

## Литература к главе 12

- [1] Прасолов В.В. *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии*. М.: МЦНМО, 2004.
- [2] Болтянский В.Г., Ефремович В.А. *Наглядная топология*. М: Наука, 1982.
- [3] Гильберт Д., Кон-Фоссен С. *Наглядная геометрия*. М: URSS, 2016.
- [4] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. *Курс дифференциальной геометрии и топологии*. СПб: Лань, 2010.

## Упражнения к главе 12

**Упражнение 12.1.** Пусть на поверхности нарисован граф, причем каждая из областей, на которые он делит поверхность, гомеоморфна диску. *Эйлеровой характеристикой* такой карты называется число  $v - e + f$ , где  $v$  — число вершин,  $e$  — число ребер и  $f$  — число областей. Докажите, что эйлеровы характеристики любых двух карт на поверхности совпадают. Указание: рассмотрите карту, получающуюся “наложением” двух карт, т.е. объединением их границ.

**Упражнение 12.2.** *Эйлеровой характеристикой поверхности* называется число

$$\chi = v - e + f,$$

где  $v$ ,  $e$  и  $f$  — числа вершин, ребер и областей любой карты, нарисованной на поверхности (согласно утверждению из упражнения 12.1, это число не зависит от карты и тем самым характеризует саму поверхность). Вычислите эйлеровы характеристики цилиндра, тора и ленты Мёбиуса.

**Упражнение 12.3.** Поверхность  $M$  получается из поверхности  $N$  вырезанием  $k$  дисков. Выразите  $\chi(M)$  через  $\chi(N)$ .

**Упражнение 12.4.** Каждая из двух поверхностей  $M$  и  $N$  имеет край, представляющий собой замкнутую кривую, состоящую из одного куска. Поверхность  $Q$  получается из поверхностей  $M$  и  $N$  склеиванием краев. Выразите  $\chi(Q)$  через  $\chi(M)$  и  $\chi(N)$ .

**Упражнение 12.5.** Вычислите эйлерову характеристику

- (1) поверхности  $M_g^m$ , полученной из сферы с  $g$  ручками вырезанием  $m$  дырок;



- (2) поверхности  $N_h^m$ , полученной из сферы с  $h$  пленками Мёбиуса вырезанием  $m$  дырок.

**Упражнение 12.6.** Сторонам многоугольника приписаны буквы  $a, b, c, \dots$  в следующем порядке:  $a, b, a, b, c, d, c, d, \dots$ . Затем стороны, помеченные одноименными буквами, склеиваются, причем стрелка на каждой стороне направлена по направлению обхода, когда соответствующая буква встречается первый раз, и против направления обхода, когда буква встречается второй раз. Докажите, что, если число разных букв равно  $2g$ , то полученная поверхность гомеоморфна сфере с  $g$  ручками.

**Упражнение 12.7.** Сторонам многоугольника приписаны буквы  $a, b, c, \dots$  в следующем порядке:  $a, a, b, b, c, c, d, d, \dots$ . Затем стороны, помеченные одноименными буквами, склеиваются, причем стрелка на каждой стороне направлена по направлению обхода. Докажите, что, если число разных букв равно  $h$ , то полученная поверхность гомеоморфна сфере с  $h$  пленками Мёбиуса.

**Упражнение 12.8.** На замкнутой ориентируемой поверхности нарисована карта, причем каждая страна представляет собой некоторый  $n$ -угольник, и в каждой вершине сходится по  $k$  ребер. Докажите, что

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{\chi}{2e},$$

где  $\chi$  — эйлерова характеристика поверхности, а  $e$  — число ребер карты. Приведите пример такой карты на сфере при  $n = 2, k = 4$ .

**Упражнение 12.9.** Вычислите эйлеровы характеристики бутылки Клейна и проективной плоскости.

## Глава 13

# Шарнирные механизмы

**План.** Шарнирные механизмы, простейшие шарнирные механизмы, механизм, реализующий параллельный перенос, антипараллелограмм, укрепление параллелограмма и антипараллелограмма, транслятор Кемпе, реверсор Кемпе, сумматор Кемпе, инверсия, основные свойства инверсии, механизмы, реализующие инверсию, инверсор Поселье, инверсор Гарта, полуалгебраические множества, рисуемые множества, теорема Кинга, универсальная теорема Кемпе, исторические комментарии, паровая машина и параллелограмм Уатта, лямбда-механизм и стопходящая машина Чебышева, формализация, ромб, укрепление шарнирного механизма, параллелограмм и антипараллелограмм.

В этой главе мы обсудим геометрию шарнирных механизмов, точнее их математической идеализации. Под *шарнирным механизмом* мы будем понимать набор жестких стержней (отрезков), соединенных в некоторых точках шарнирами. Кроме того, некоторые шарниры могут быть жестко закреплены в объемлющем пространстве. Для простоты мы ограничимся плоскими механизмами — такими, у которых все звенья лежат в одной плоскости.

Нас будут интересовать следующие вопросы:

- Какими геометрическими свойствами обладают возможные положения шарнирного механизма?
- Какие геометрические преобразования можно реализовать с помощью шарнирных механизмов?
- Если в одном из шарниров закрепить карандаш, то при деформациях шарнирного механизма он прочертит на плоскости некоторую линию. Какой она может быть? Этот вопрос будет одним из главных в данной лекции.

Мы обсудим формализацию понятия шарнирного механизма и дадим некоторые (но далекие от полных) исторические комментарии. Во

всяком случае, мы увидим, что интерес к шарнирным механизмам вырос из важных практических задач.

## 13.1 Простейшие шарнирные механизмы

### 13.1.1 Шарнирный механизм, реализующий параллельный перенос

Рассмотрим 7 стержней, скрепленных шарнирами в соответствии с рис. 13.1.

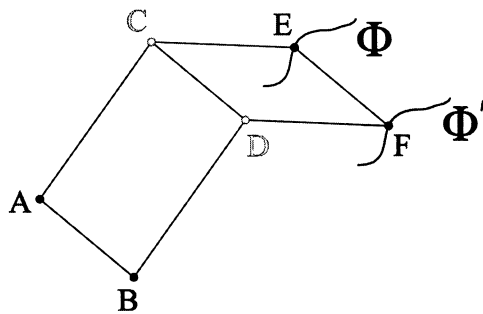


Рис. 13.1: Стержневой механизм, реализующий параллельный перенос

Длины стержней удовлетворяют соотношениям  $|AB| = |CD| = |EF|$ ,  $|AC| = |BD|$ ,  $|CE| = |DF|$ . Положения шарниров  $A$  и  $B$  жестко закреплены (но стержни могут вокруг них вращаться). Тогда если точка  $E$  будет прочерчивать некоторую фигуру  $\Phi$ , то точка  $F$  будет пробегать фигуру  $\Phi'$ , полученную из  $\Phi$  параллельным переносом на вектор  $\overrightarrow{AB}$ .

Обратим внимание, что этот механизм может переносить параллельно только такие точки  $E$ , которые лежат в области, определенной неравенством  $||AC| - |CE|| \leq |AE| \leq |AC| + |CE|$ . Эта область является кольцом, если  $|AC| \neq |CE|$ , и кругом, если  $|AC| = |CE|$ .

### 13.1.2 Важное замечание. Антипараллелограмм

Только что рассмотренный нами механизм при “неаккуратном использовании” может перестать реализовывать параллельный перенос. Это связано с тем, что замкнутая ломаная  $ABCD$ , у которой  $|AB| = |CD|$

и  $|BC| = |AD|$ , не обязательно образует параллелограмм, возможна и такая конфигурация: рис. 13.2.

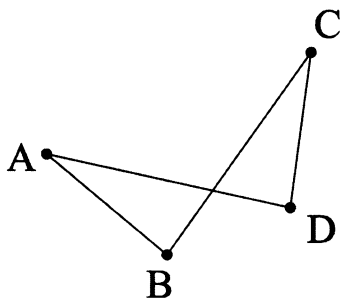


Рис. 13.2: Антипараллелограмм

Такая конфигурация называется *антипараллелограммом*. Оказывается, любой шарнирный параллелограмм можно продеформировать в антипараллелограмм и наоборот. А именно, для этого нужно развести точки  $A$  и  $C$  на максимальное расстояние  $|AB| + |BC|$ , при этом параллелограмм выродится в отрезок, а затем нужно начать сближать точки  $A$  и  $C$  так, чтобы точки  $B$  и  $D$  оказались в одной полуплоскости относительно прямой  $AC$ .

Если не обращать внимание на этот факт, то он легко может стать источником пробелов и ошибок в рассуждениях.

### 13.1.3 Укрепление параллелограмма и антипараллелограмма

Рассмотрим шарнирный механизм, состоящий из пяти стержней  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $AD$  и  $EF$ , скрепленных, как показано на рис. 13.3.

Пусть при этом  $|AB| = |DC| = |EF|$ ,  $|AD| = |BC|$ . Шарниры  $E$  и  $F$  расположены на стержнях  $AD$  и  $BC$  так, чтобы  $|AE| = |BF|$  (для простоты можно считать, что  $E$  и  $F$  находятся в серединах соответствующих отрезков).

Как нетрудно проверить, в любых положениях  $ABCD$  является параллелограммом. Этот механизм называется *укрепленным параллелограммом*.

Укрепить антипараллелограмм тоже можно, но это несколько сложнее. Рассмотрим механизм, показанный на рис. 13.4.

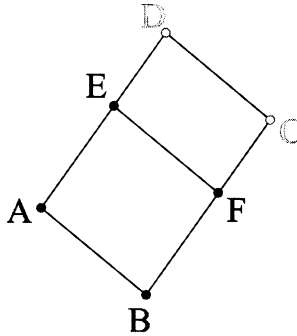


Рис. 13.3: Укрепленный параллелограмм

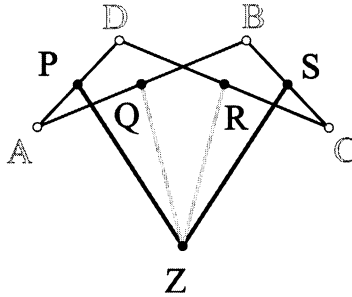


Рис. 13.4: Укрепленный антипараллелограмм

Здесь  $ABCD$  — антипараллелограмм. Шарниры  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  и  $S$  расположены в серединах соответствующих отрезков. Стержни  $ZP$ ,  $ZQ$ ,  $ZR$ ,  $ZS$  достаточно длинные, потребуем для их длин выполнения соотношений  $|ZP| = |ZS|$ ,  $|ZQ| = |ZR|$  и

$$\frac{1}{4}(|AB|^2 - |AD|^2) = |ZP|^2 - |ZQ|^2.$$

Проверьте, что тогда  $Z$  лежит на серединном перпендикуляре к  $BD$  (и к  $AC$ , и к  $PS$ , и к  $QR$ ). Убедитесь, что эта конструкция изгибается, но при этом  $ABCD$  остается антипараллелограммом.

В дальнейшем, если не оговорено противное, под (анти)параллелограммом мы будем понимать укрепленный (анти)параллелограмм,

но на чертежах дополнительные, укрепляющие, стержни показывать не будем.

Рассмотрим еще несколько интересных шарнирных механизмов.

### 13.1.4 Параллельный перенос и сложение векторов: транслятор Кемпе

Пусть заданы вещественные числа  $a > 0$  и  $b > 0$ . Требуется построить шарнирный механизм, который содержит стержень  $OX$  длины  $a$ , а также шарниры  $Y$  и  $Z$  такие, что в каждой конфигурации вектор  $\overrightarrow{OZ}$  равен сумме векторов  $\overrightarrow{OX}$  и  $\overrightarrow{OY}$ :

$$\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY},$$

и при этом шарнир  $Y$  относительно шарнира  $O$  может принимать любое положение, удовлетворяющее неравенству  $|OY| \leq b$ .

Заметим, что если  $\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}$ , то точка  $Z$  является концом вектора  $\overrightarrow{YZ}$ , равного вектору  $\overrightarrow{OX}$ . Это соображение является ключевым для построения соответствующего механизма.

Решается эта задача с помощью механизма очень похожего на механизм, приведенный нами в самом начале лекции — отличие состоит в том, что у нового механизма нет закрепленных шарниров. А именно, рассмотрим два (укрепленных) параллелограмма  $OXNM$  и  $MNZY$ , у которых  $|OX| = |MN| = |YZ| = a$  и  $|XN| = |OM| = |NZ| = |MY| = R$ , где  $2R = b$ . Этот механизм и есть *транслятор Кемпе*, выполняющий требуемое действие (проверьте это), рис. 13.5.

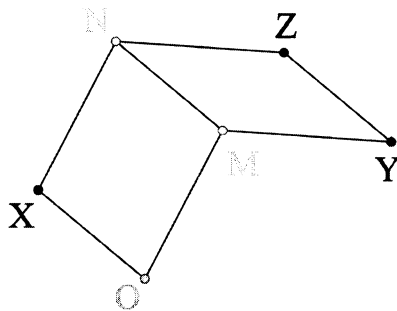


Рис. 13.5: Транслятор Кемпе

### 13.1.5 Умножение углов на целые числа и деление углов на равные части: реверсор Кемпе

Для заданного целого числа  $k \neq 0$  мы построим такой шарнирный механизм — реверсор Кемпе, в котором имеется три стержня  $OA$ ,  $OB$  и  $OC$ , связанные в каждой конфигурации следующим соотношением: если угол от вектора  $OC$  к вектору  $OA$  равен  $\alpha$ , то угол от вектора  $OC$  к вектору  $OB$  равен  $k\alpha$ . Иными словами, мы построим механизм, который умеет умножать углы на целые ненулевые числа. Обратите внимание, что нас интересуют как положительные  $k$ , так и отрицательные — в дальнейшем это нам понадобится<sup>1</sup>.

Рассмотрим для начала укрепленный антипараллелограмм  $OXPY$  с вершиной  $O$ , закрепленной в начале координат. Добавим к нему два стержня  $OZ$  и  $ZW$ , скрепленных в подвижном шарнире  $Z$ , с шарниром  $W$ , расположенном на стержне  $YP$ . Расстояние  $YW$  и длины стержней  $OZ$  и  $ZW$  выберем такими, чтобы четырехугольник  $OYWZ$  оказался антипараллелограммом, подобным исходному. Укрепим антипараллелограмм  $OYWZ$ . Из соображений подобия вытекает, что углы  $YOX$  и  $ZOY$  равны между собой, а  $|OY|^2 = |OX| \cdot |OZ|$ , рис. 13.6.

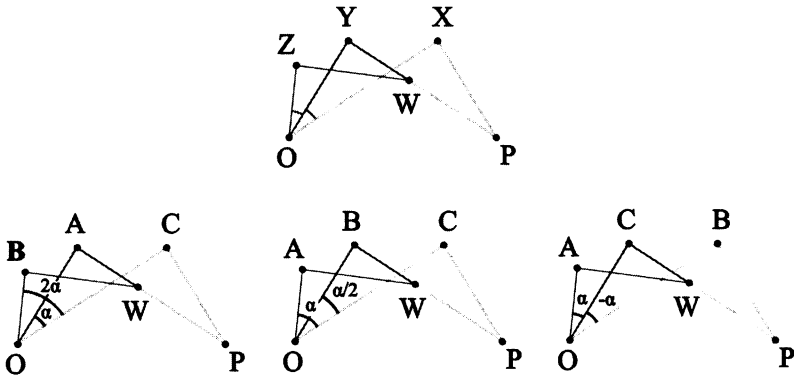


Рис. 13.6: Реверсор Кемпе

Для  $k = 2$  нужно считать, что  $X = C$ ,  $Y = A$ ,  $Z = B$  (рис. 13.6, снизу слева), а для  $k = -1$  — что  $Y = C$ ,  $Z = A$ ,  $X = B$  (рис. 13.6, снизу справа).

<sup>1</sup>Мы говорим, что угол от ненулевого вектора  $v$  с направлением  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$  к ненулевому вектору  $w$  равен  $\beta \in \mathbb{R}$ , если направление вектора  $w$  равно  $(\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta))$ .

Чтобы получить решение в общем случае, нужно повторить проделанную процедуру, добавив к антипараллелограмму  $OYZZ$  еще один подобный ему антипараллелограмм, к последнему также добавить подобный антипараллелограмм и т.д. Построенный механизм Кемпе назвал *реверсором* в силу того, что он умеет умножать углы на отрицательные целые числа.

Нетрудно сообразить, что механизм, который умеет умножать угол на ненулевое целое  $k$ , можно использовать и для деления угла на  $k$  — см. рис. 13.7, а также рис. 13.6, снизу в середине, случай деления на  $k = 2$ :

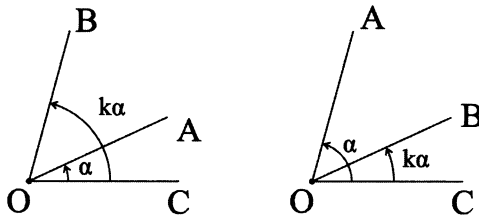


Рис. 13.7: Деление углов

(в некотором смысле, мы меняем местами “вход” и “выход” механизма).

**Замечание 13.1.** Обратите внимание, что с помощью реверсора Кемпе для  $k = 3$  можно решить задачу трисекции угла — задачу на построение, которая не разрешима только циркулем и линейкой.

### 13.1.6 Сложения углов: сумматор Кемпе

Используя реверсор Кемпе, можно построить сумматор углов.

А именно, требуется построить такой шарнирный механизм, в котором имеются четыре стержня  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  и  $OD$ , причем углы между ними в каждой конфигурации связаны следующим соотношением: если угол от вектора  $\overrightarrow{OD}$  к вектору  $\overrightarrow{OA}$  равен  $\alpha$ , а угол от вектора  $\overrightarrow{OD}$  к вектору  $\overrightarrow{OB}$  равен  $\beta$ , то угол от вектора  $\overrightarrow{OD}$  к вектору  $\overrightarrow{OC}$  равен  $\alpha + \beta$ .

Этот механизм состоит всего из двух дополнительных реверсоров, нужным образом связанных со стержнями, данными в условии.

Первый реверсор делит угол  $AOB$  пополам, пусть при этом  $OY$  — стержень этого реверсора, который идет вдоль “биссектрисы” угла  $AOB$ . Легко проверить, что тогда угол от  $OD$  к  $OY$  равен  $(\alpha + \beta)/2$ .



Второй реверсор удваивает угол  $DOY$ , более точно, он так прикреплен к стержням  $OD$ ,  $OY$  и  $OC$ , что угол от  $OD$  к  $OC$  в два раза больше угла от  $OD$  к  $OY$ .

Тем самым построенный механизм, называемый *сумматором Кемпе*, реализует поставленную задачу, рис. 13.8.

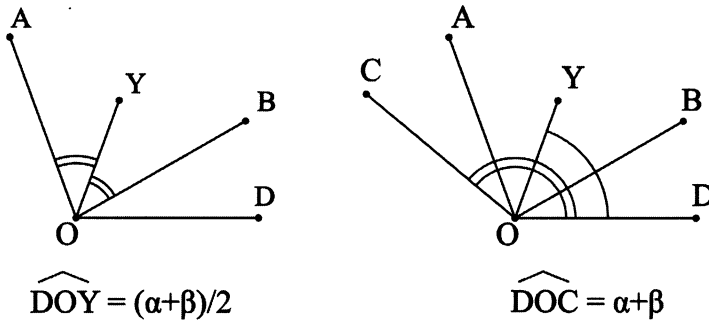


Рис. 13.8: Сумматор Кемпе

## 13.2 Инверсия

### 13.2.1 Определение и основные свойства инверсии

Инверсия — это одно из замечательных геометрических преобразований.

Пусть на плоскости  $\Pi$  выбрана точка  $O$  (*центр или полюс инверсии*) и задано число  $a > 0$  (*радиус или степень инверсии*). Каждой точке  $P \in \Pi$ , отличной от  $O$ , *инверсия* ставит в соответствие точку  $Q$  на луче  $[OP]$  такую, что  $|OP| \cdot |OQ| = a^2$ . Мы будем обозначать инверсию через  $I$ , а в тех случаях, когда нужно уточнить центр и радиус инверсии, — через  $I_{O,a}$ .

Легко видеть, что неподвижными точками инверсии служат точки окружности инверсии, и причем только они. Инверсия является взаимно однозначным отображением  $\Pi \setminus \{O\}$  на себя, при этом обратным отображением к инверсии служит она же сама:  $(I)^{-1} = I$  или  $I^2 = \text{id}_{\Pi \setminus \{O\}}$ .

Инверсия обладает рядом важных свойств, которые нам понадобятся в этой лекции. А именно, нам нужно выяснить, как инверсия действует на окружности и прямые.

**Теорема 13.2.** Пусть  $I$  — инверсия с центром в  $O$  и радиусом  $a$ . Тогда

- (1) Если прямая  $\ell$  проходит через центр инверсии  $O$ , то образом  $\ell \setminus \{O\}$  под действием инверсии  $I$  является  $\ell \setminus \{O\}$ . Иными словами прямая, проходящая через  $O$ , под действием инверсии  $I$  переходит в себя (но нужно помнить, что в точке  $O$  инверсия не определена, и что  $O$  не является образом ни для какой точки плоскости).
- (2) Если прямая не проходит через центр инверсии  $O$ , то ее образом служит некоторая окружность, проходящая через точку  $O$ , за исключением самой точки  $O$ . И обратно, образом окружности, проходящей через  $O$  и рассматриваемой без точки  $O$ , служит некоторая прямая, не проходящая через  $O$ .
- (3) Образом окружности, не проходящей через точку  $O$ , служит окружность, также не проходящая через  $O$ . Окружность переходит в себя, если она имеет с окружностью инверсии две общие точки, и в каждой из них эти окружности пересекаются под прямым углом.

*Доказательство.* (1) Очевидно из определения инверсии (но не забудьте проверить, что любая точка на  $\ell \setminus \{O\}$  принадлежит образу  $I(\ell \setminus \{O\})$ ).

(2) Опустим из точки  $O$  на прямую  $\ell$  перпендикуляр  $OA$ . Пусть  $A' = I(A)$  — образ точки  $A$  при инверсии. Окружность, построенную на  $OA'$  как на диаметре, обозначим через  $S$ , см. рис. 13.9.

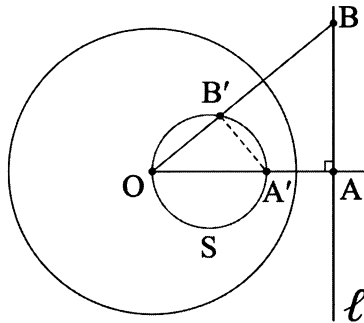


Рис. 13.9: При инверсии прямая  $\ell$  и окружность  $S$  без точки  $O$  меняются местами

Докажем, что  $S \setminus \{O\} = I(\ell)$ .

Сначала проверим, что  $S \setminus \{O\} \supseteq I(\ell)$ . Пусть  $B$  — некоторая точка прямой  $\ell$ , отличная от  $A$ , а  $B'$  — ее образ при инверсии. По определению инверсии  $|OB'| \cdot |OB| = |OA'| \cdot |OA| = a^2$ , следовательно,  $\frac{|OB'|}{|OA'|} = \frac{|OA|}{|OB|}$ . Теперь заметим, что в треугольниках  $\triangle OAB$  и  $\triangle OB'A'$  угол  $O$  общий, поэтому они подобны. Тем самым в треугольнике  $\triangle OB'A'$  угол  $B'$  прямой, поэтому  $B' \in S$ . Осталось заметить, что  $B'$  не может совпадать с  $O$ .

Теперь докажем обратное включение  $S \setminus \{O\} \subseteq I(\ell)$ . Иными словами, для любой точки  $B' \in S \setminus \{O, A'\}$  нужно показать, что ее прообраз при инверсии, т.е. такая точка  $B$ , что  $I(B) = B'$ , принадлежит  $\ell$ . Рассуждая аналогично, мы увидим, что  $\triangle OAB$  и  $\triangle OB'A'$  подобны, поэтому в  $\triangle OAB$  угол  $B$  прямой, откуда  $B \in \ell$ .

Обратное утверждение доказывается аналогично.

(3) Пусть окружность  $S$  не проходит через точку  $O$ . Рассмотрим ее диаметр  $AB$ , на котором (или на его продолжении) лежит центр инверсии. Пусть  $A' = I(A)$ ,  $B' = I(B)$ , и  $S'$  — окружность, построенная на  $A'B'$  как на диаметре, см. рис. 13.10.

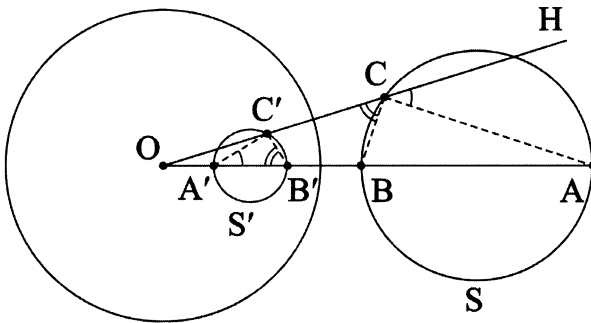


Рис. 13.10: При инверсии окружность  $S$  и окружность  $S'$  меняются местами

Докажем, что  $S' = I(S)$ .

Пусть точка  $C \in S$  не лежит на прямой  $AB$ , и  $C' = I(C)$ . Так же, как и в предыдущем пункте доказывается, что треугольники  $\triangle OC'A'$  и  $\triangle OAC$  подобны, поэтому равны углы  $\angle C'A'B'$  и  $\angle HCA$ , где  $H$  — некоторая точка на продолжении луча  $[OC]$  за точки  $C$  и  $C'$ . Аналогичным образом, из подобия треугольников  $\triangle OC'B'$  и  $\triangle OBC$  следует, что  $\angle OB'C'$  равен  $\angle OCB$ . Отсюда получаем, что  $\angle ACB = \angle A'C'B'$ .

Таким образом, угол  $\angle ACB$  прямой, т.е.  $C \in S$ , тогда и только тогда, когда прямым является угол  $\angle A'C'B'$ , т.е.  $C' \in S'$ .  $\square$

**Замечание 13.3.** Теорема 13.2 может быть доказана с помощью комплексных чисел. Для этого нужно заметить, что инверсия относительно окружности радиуса  $a$  с центром в начале координат задается формулой  $z \mapsto \frac{a^2}{\bar{z}}$ . Кроме того, понадобятся следующие два факта.

- (1) Уравнение окружности с центром в точке  $z_0$  и радиусом  $r$  с помощью комплексных чисел записывается в виде  $(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2$ .
- (2) Уравнение  $Ax + By = 1$  прямой, не проходящей через 0, может быть записано с помощью комплексных чисел в виде  $z\bar{z}_0 + \bar{z}z_0 = 1$ , где  $z = x + iy$  и  $z_0 = \frac{1}{2}(A + Bi)$ .

Детали оставляем читателю в качестве упражнения.

**Замечание 13.4.** С помощью инверсии можно доказать, что любое построение, осуществимое с помощью циркуля и линейки, можно проделать одним циркулем.

## 13.2.2 Механизмы, реализующие инверсию

### Инверсор Поселье

Рассмотрим шарнирный механизм, состоящий из шести стержней: четырех стержней длины  $f$ , составленных в виде ромба  $ABCD$  с шарнирами во всех углах ромба, и еще двух стержней  $OB$  и  $OD$  длины  $d$ , где  $d > f$ . Шарнир  $O$  будем считать неподвижным. Ромб  $ABCD$  будем считать укрепленным, см. рис. 13.11.

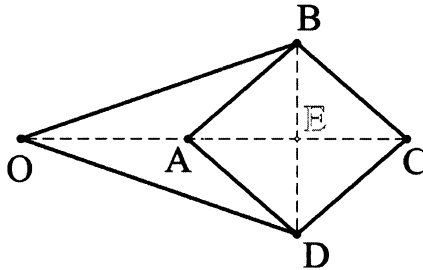


Рис. 13.11: Точки  $A$  и  $C$  связаны инверсией относительно точки  $O$

**Предложение 13.5.** Точки  $A$  и  $C$  связаны инверсией относительно точки  $O$  с радиусом инверсии  $a$ , для которого  $a^2 = d^2 - f^2$ .

*Доказательство.* Треугольники  $\triangle OBD$ ,  $\triangle ABD$  и  $\triangle CBD$  равнобедренные с общим основанием  $BD$ . Поэтому точки  $O$ ,  $A$  и  $C$  лежат на одной прямой — серединном перпендикуляре к отрезку  $BD$ . Пусть  $E$  — середина отрезка  $BD$ . Тогда

$$\begin{aligned} |OA| \cdot |OC| &= (|OE| - |AE|)(|OE| + |AE|) = |OE|^2 - |AE|^2 = \\ &= (|OB|^2 - |BE|^2) - (|AB|^2 - |BE|^2) = |OB|^2 - |AB|^2 = d^2 - f^2 = a^2, \end{aligned}$$

а это и означает, что точки  $A$  и  $C$  связаны указанной инверсией.  $\square$

Легко заметить, что инверсор Поселье может строить образы точек при инверсии не для всех точек плоскости — ни точку  $A$ , ни точку  $C$  как нельзя подвести слишком близко к  $O$ , так и нельзя отодвинуть достаточно далеко. Область, где “работает” инверсор Поселье, описана в следующем утверждении, доказательство которого очевидно.

**Следствие 13.6.** Соответствие  $A \mapsto C$ , реализованное с помощью инверсора Поселье, задает инверсию кольца  $K$  с центром в точке  $O$ , внутренним радиусом  $d - f$  и внешним радиусом  $d + f$ , на себя. Отображение  $I: K \rightarrow K$  является взаимно однозначным.

Если теперь к инверсору Поселье добавить стержень  $RA$  с неподвижным шарниром  $R$  длины, равной расстоянию от  $R$  до  $O$ , то точка  $A$  будет двигаться по окружности  $S$  с центром в  $R$  и радиусом  $RA$ , проходящей через центр инверсии  $O$ . Но, как говорилось выше, точка  $A$  может пробегать не всю окружность  $S$ , а только ту ее часть, которая лежит в кольце  $K$ .

Точка  $C$  при этом будет двигаться по прямой линии  $I(S)$ , точнее по ее пересечению с кольцом  $K$ .

**Замечание 13.7.** Первые сообщения о построении инверсора были в частном письме офицера инженерного корпуса французской армии Поселье, датированном 1864 годом. Однако письмо подробностей построения не содержало. В 1868 году студент П.Л. Чебышева Липман Липкин изобретает инверсор (прямоугольник Липкина) и в 1870 публикует подробную статью. Наконец, в 1873 году появляется статья Поселье с описанием такого же инверсора и со ссылкой на работу Липкина (это замечание взято из [1]).

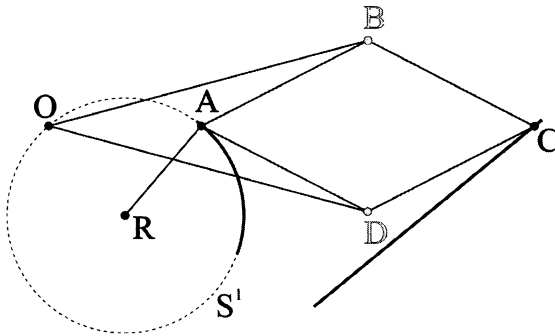


Рис. 13.12: Инверсор Поселье

**Инверсор Гарта**

Приведем пример еще одного инверсора, изобретенного Гартом (Harry Hart) в 1875 году. Рассмотрим (укрепленный) антипараллелограмм  $ABDC$ . Тогда четырехугольник  $ABCD$  является равнобочной трапецией с основаниями  $AD$  и  $BC$ , см. рис. 13.13.

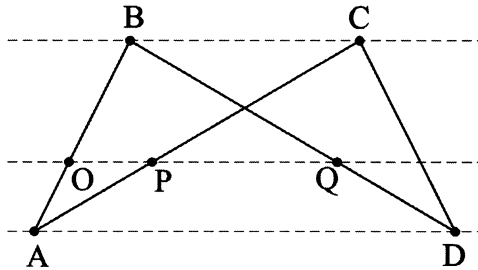


Рис. 13.13: Произведение  $|OP| \cdot |OQ|$  постоянно

На сторонах  $AB$ ,  $AC$  и  $BD$  зафиксируем соответственно точки  $O$ ,  $P$  и  $Q$  так, чтобы они лежали на одной прямой, параллельной основаниям трапеции  $AD$  и  $BC$ . Длины  $|AB| = |CD|$  и  $|BD| = |AC|$  будем считать известными и фиксированными.

**Предложение 13.8.** В описанных выше условиях произведение  $|OP| \cdot |OQ|$  постоянно.

**Задача 13.9.** Докажите предложение 13.8. Заодно покажите, что произведение  $|OP| \cdot |OQ|$  зависит от длин  $|AB| = |CD|$  и  $|BD| = |AC|$  и от того, в каком отношении точка  $O$  разбивает отрезок  $AB$ .

Будем считать, что антипараллелограмм  $ABDC$  собран из стержней, шарнирно соединенных в его вершинах; в точках  $O$ ,  $P$  и  $Q$  также расположены шарниры, причем шарнир  $O$  закреплен. В соответствии с предложением 13.8, точки  $P$  и  $Q$  будут связаны инверсией с центром в точке  $O$  и степенью, зависящей от длин стержней  $|AB| = |CD|$ ,  $|BD| = |AC|$  и от отношения  $|AO|/|OB|$ . Поэтому если, как и в случае с инверсором Поселье, заставить точку  $P$  двигаться по окружности, проходящей через  $O$ , то точка  $Q$  будет двигаться по прямой, см. рис. 13.14.

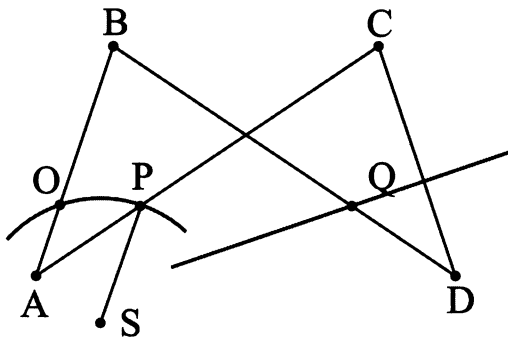


Рис. 13.14: Инверсор Гарта

**Задача 13.10.** Опишите “область определения” и “область значений” инверсора Гарта.

## 13.3 Теорема Кемпе

### 13.3.1 Рисуемые множества и теорема Кинга

Представим, что в одной из точек шарнирного механизма закреплен карандаш. Какие линии может прочертить этот карандаш, если мы будем менять форму шарнирного механизма (разумеется, не меняя его устройства и не деформируя стержни, из которых он состоит)?

Аналогичный вопрос можно поставить, если рассматривать шарнирные механизмы не на плоскости, а в пространстве  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ .

Ответ содержится в приведенной ниже теореме Кинга.

Множество  $A \subset \mathbb{R}^d$  называется *полуалгебраическим*, если оно является конечным объединением множеств, каждое из которых представляет собой решение конечной системы полиномиальных равенств и неравенств. Легко видеть, что конечные объединения, конечные пересечения, а также дополнения в  $\mathbb{R}^d$  полуалгебраических множеств являются также полуалгебраическими множествами.

Будем говорить, что шарнирный механизм *рисует множество*  $A$ , если некоторый шарнир (или фиксированная точка на каком-то из стержней) этого механизма пробегает в точности все множество  $A$ , пока механизм принимает все возможные конфигурации.

В этом определении есть небольшая тонкость: мы не требуем здесь, чтобы множество  $A$  “заметалось” при непрерывных деформациях шарнирного механизма: в нашем определении рисуемое множество может быть несвязным, см. рис. 13.15.

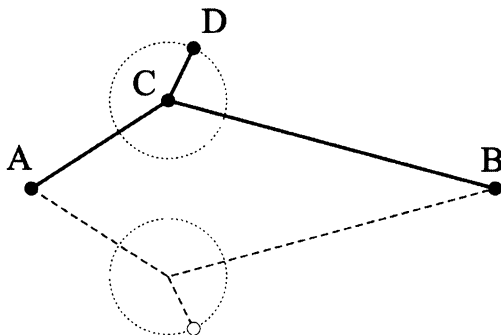


Рис. 13.15: Шарниры  $A$  и  $B$  закреплены, шарниры  $C$  и  $D$  подвижны

В разделе про формализацию мы вернемся к этому определению.

Множество  $A$  называется *рисуемым*, если существует механизм, который рисует это множество.

**Теорема 13.11** (Кинг [9], [10]). *При  $d \geq 2$  множество  $A \subset \mathbb{R}^d$  рисуемо, если только если  $A$  или совпадает со всем пространством  $\mathbb{R}^d$ , или является компактным полуалгебраическим множеством.*

Доказательство мы не приводим, интересующимся рекомендуем обратиться к текстам [9] и [10].

В частности, теорема 13.11 утверждает, что с помощью шарнирных механизмов можно нарисовать любой многогранник, а также конеч-



ное объединение многогранников. Рисуемой в  $\mathbb{R}^3$  является любая компактная поверхность, заданная как решение полиномиального уравнения (например, эллипсоид). Больше того, рисуемым является фрагмент некомпактной поверхности, являющейся решением полиномиального уравнения, содержащийся в некотором шаре (или эллипсоиде) — в частности, рисуемыми являются подходящие куски гиперboloидов или параболоидов. Аналогичные утверждения верны и для кривых на плоскости.

**Задача 13.12.** Модифицируйте инверсор Поселье и постройте шарнирный механизм, рисующий треугольник на плоскости.

### 13.3.2 Универсальная теорема Кемпе

В этом параграфе мы приведем основные идеи доказательства теоремы Кемпе о том, что с помощью подходящего шарнирного механизма можно начертить часть произвольной наперед заданной *алгебраической кривой*, содержащуюся в некотором фиксированном круге. Под алгебраической кривой мы понимаем множество нулей произвольного многочлена от двух переменных.

**Замечание 13.13.** Из теоремы Стоуна–Вейерштрасса о приближении непрерывных отображений вытекает, что с помощью алгебраических кривых можно сколь угодно хорошо приблизить любую непрерывную кривую, в связи с чем Терстон интерпретировал этот результат как то, что шарнирные механизмы могут расписаться за любого из нас.

Эта теорема возникла в трудах Альфреда Кемпе (Kempe) в 1876 году (см. [6]). Любопытно, что в 1984 году в его доказательстве была обнаружена ошибка, которую удалось исправить лишь в 2002 году М. Каповичу и Дж. Миллсону [7], см. также [8].

Будем считать, что на плоскости введены стандартные декартовы координаты  $Oxy$ .

**Теорема 13.14** (Кемпе [6], Капович и Миллсон [7]). Пусть  $f(x, y)$  — вещественный многочлен от двух переменных и  $D^2$  — замкнутый диск на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Тогда существует плоский шарнирный механизм, который рисует множество  $D^2 \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ .

*Доказательство.* Без ограничения общности можно считать, что центр  $O$  круга  $D^2$  совпадает с началом координат.

“Параметризуем” точки круга  $D^2$  с помощью положений точки  $C$  (укрепленного) шарнирного ромба  $OACB$ , у которого точка  $O$  совпадает с центром круга  $D^2$ , а длина стороны  $a$  равна половине радиуса

круга  $D^2$ . Положим  $OA = a(\cos \alpha, \sin \alpha)$ ,  $OB = a(\cos \beta, \sin \beta)$ , откуда  $C = (x, y) = a(\cos \alpha + \cos \beta, \sin \alpha + \sin \beta)$ . Пусть

$$f(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq n} c_{ij} x^i y^j,$$

где  $c_{ij}$  — коэффициенты многочлена  $f$ , являющиеся постоянными вещественными числами. Подставив в эту формулу выражения для координат точки  $B$ , получим

$$(13.1) \quad f = \sum_{0 \leq i+j \leq n} c_{ij} a^{i+j} (\cos \alpha + \cos \beta)^i (\sin \alpha + \sin \beta)^j.$$

Раскрывая скобки и применяя формулы, преобразующие произведение двух косинусов, косинуса и синуса, а также двух синусов в сумму тригонометрических функций от суммы и разности углов, мы приведем выражение (13.1) к виду

$$(13.2) \quad f = \sum_{|r|+|s| \leq n} [d_{rs} \cos(r \cdot \alpha + s \cdot \beta) + e_{rs} \sin(r \cdot \alpha + s \cdot \beta)] = \\ = \sum_{|r|+|s| \leq n} [d_{rs} \cos(r \cdot \alpha + s \cdot \beta) + e_{rs} \cos(r \cdot \alpha + s \cdot \beta - \pi/2)].$$

В этой формуле величины  $d_{rs}$  и  $e_{rs}$  некоторым определенным образом выражаются через коэффициенты  $c_{ij}$  и являются постоянными числами, не зависящими от  $\alpha$  и  $\beta$ .

Теперь мы опишем, как устроен механизм, “вычисляющий” значение  $f(x, y)$  в точках круга  $D^2$ . Вычислять  $f(x, y)$  этот механизм будет в том смысле, что для данной точки  $(x, y) \in D^2$  он будет строить некоторую точку плоскости с абсциссой, равной  $f(x, y)$ , при этом на ординату мы никаких требований не накладываем.

Более точно, мы построим механизм, который “вычисляет” в указанном смысле выражение (13.2), зависящее от  $\alpha$  и  $\beta$ .

Пусть стержень  $OX$  направлен вдоль оси абсцисс, а стержень  $OY$  — вдоль оси ординат, будем считать концы этих стержней фиксированными. Тогда с помощью реверсов Кемпе и сумматоров Кемпе, начиная от подвижных стержней  $OA$  и  $OB$  (для них  $\angle AOX = \alpha$  и  $\angle BOX = \beta$ ), мы можем построить механизмы, которые содержат такие стержни  $OD_{rs}$  и  $OE_{rs}$ , что угол от  $OX$  к  $OD_{rs}$  равен  $r \cdot \alpha + s \cdot \beta$ , а угол от  $OX$  к  $OE_{rs}$  равен  $r \cdot \alpha + s \cdot \beta - \pi/2$ . Позаботимся также, чтобы длины этих стержней удовлетворяли равенствам  $|OD_{rs}| = d_{rs}$

и  $|OE_{rs}| = e_{rs}$ . Итак, в нашем распоряжении имеется несколько механизмов, которые вычисляют величины вида  $d_{rs} \cos(r \cdot \alpha + s \cdot \beta)$  и  $e_{rs} \cos(r \cdot \alpha + s \cdot \beta - \pi/2)$ , т.е. строят точки с такими абсциссами.

Теперь с помощью транслятора Кемпе построим вектор  $\overrightarrow{OF}$ , равный сумме всех векторов  $\overrightarrow{OD_{rs}}$  и  $\overrightarrow{OE_{rs}}$ . Легко видеть, что зависимость абсциссы точки  $F$  от  $\alpha$  и  $\beta$  в точности задается правой частью формулы (13.2).

В силу компактности круга  $D^2$ , значение ординаты точки  $F$  не может превышать некоторой константы  $M$ . Поэтому если мы сумеем добавить к уже построенному шарнирному механизму “устройство”, которое будет ограничивать положение шарнира  $F$  только отрезком прямой  $x = 0$  от точки  $M_1 = (0, -M)$  до точки  $M_2 = (0, M)$ , то тогда всевозможные положения шарнира  $C$  будут в точности совпадать с множеством  $D^2 \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ .

Добавим к нашему механизму инверсор Поселье (см. рис. 13.16) в указанном на рисунке положении на плоскости и с такими длинами стержней  $d$  и  $f$ , чтобы среди положений шарнира  $F$  содержался отрезок  $M_1M_2$ . Остается добавить к инверсору стержень  $QT$  с неподвижным шарниром  $T$  так, чтобы  $Q$  могла двигаться только по окружности, являющейся образом при инверсии прямой  $x = 0$  — тогда  $F$  сможет двигаться только по прямой  $x = 0$  (точнее, по отрезку этой прямой).

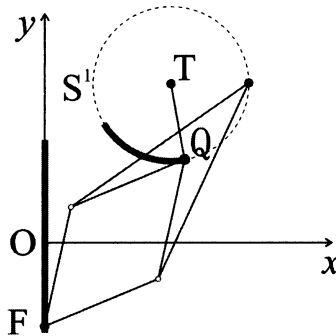


Рис. 13.16: Благодаря инверсору Поселье точка  $F$  может двигаться только вдоль прямой  $x = 0$

□

## 13.4 Исторические комментарии

Уже из рассмотренных нами вопросов видно, что теория шарнирных механизмов весьма содержательна с точки зрения математики. Но, как это часто бывает, исторически интерес к шарнирным механизмам возник из практических задач.

### 13.4.1 Паровая машина и параллелограмм Уатта

В 1812 году английский изобретатель Томас Ньюкомен построил работающую паровую машину. Как считается, это была первая паровая машина, пригодная для использования в промышленных масштабах. Она применялась для приведения в действие насосов, откачивающих воду из шахт. До появления первых пароходов и паровозов еще должно было пройти почти 100 лет.

На рисунке 13.17 показана паровая машина Ньюкомена. Опишем ее принцип действия.

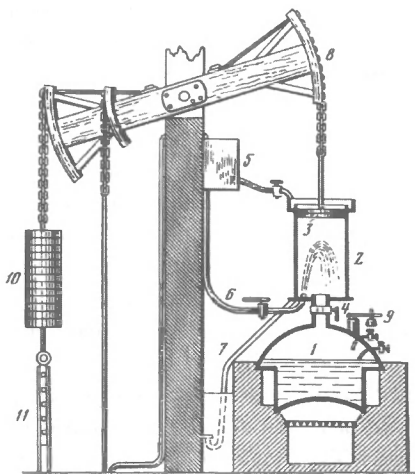


Рис. 13.17: Паровая машина Ньюкомена

К одному плечу коромысла прикреплен противовес и привод водяного насоса, находящегося в шахте, а к другому — шток поршня паровой машины. Противовес выбирался так, чтобы в свободном состоянии

левое плечо коромысла перевешивало и поднимало поршень. При этом в цилиндр в пространство под поршнем поступает пар, затем впускной клапан перекрывается, пар в цилиндре конденсируется охлаждением и под поршнем образуется разрежение. Атмосферное давление опускает поршень (поэтому часто эту машину называли пароатмосферной) и как раз на этой стадии машина отдает мощность. Потом конденсированная вода сливается, впускной клапан открывается, и цикл повторяется снова. Как видно, машина Ньюкомена совершала полезную работу только при движении поршня вниз, а обратный ход поршня вверх был холостым.

Концы коромысла имели форму дуг окружности, а приводы были цепными, чтобы обеспечить вертикальное положение тяги насоса и штока поршня. Здесь читателю стоит повторить историю промышленности XVIII-го века и понять, насколько непросто было изготовить с достаточной степенью точности цилиндр и поршень, насколько непросто было обеспечить уплотнение между стенками цилиндра и поршнем, и наконец, насколько несовершенны были смазочные материалы.

Во второй половине XVIII-го века над усовершенствованием машины Ньюкомена много работал Джеймс Уатт, шотландец по происхождению. Он изобрел так называемый *конденсатор*, который увеличил КПД машины Ньюкомена, в результате чего конденсаторы Уатта стали добавлять к уже построенным машинам.

Уатту удалось изобрести двухстороннюю машину: у нее оба хода поршня были рабочими — пар попеременно поступал в пространство над и под поршнем. Как легко понять, место, в котором шток поршня проходит через верхнюю крышку машины, должно быть уплотнено в достаточной степени, чтобы выдерживать давление пара.

И вот тут возникает интересная задача: как передать на коромысло усилие от поршня при его ходе вверх, учитывая, что шток должен сохранять вертикальное положение с высокой точностью. Иными словами, нужно было придумать механизм, сопрягающий прямолинейное движение штока поршня и движение по окружности (правого) конца коромысла. Эту задачу Уатт успешно решил с помощью изобретенного им *шарнирного механизма параллельного движения* и, как он сам писал в одном из писем сыну: «Хотя я не очень гонюсь за славой, но горжусь механизмом параллельного движения больше, чем любым другим своим изобретением»<sup>2</sup>. Отметим, что Уатт нашел лишь приближенное решение. Идея его механизма такая. Рассмотрим ломаную

---

<sup>2</sup>“Though I’m not over anxious after fame, yet I am more proud of the parallel motion than of any other invention I have ever made.” — 1808, письмо к сыну, цитируется по книге Franz Reuleaux, “The Kinematics of Machinery” (1876) или по книге James

$O_1A_1A_2O_2$ , крайние ребра которой имеют одинаковую длину, а концы  $O_1$  и  $O_2$  закреплены, см. рис. 13.18. Уатт заметил, что при изменении положения стержней траектория точки  $M$  незначительно уклоняется от прямой. В действительности, траектория точки  $M$  — вытянутая “восьмерка”. При правильно подобранных длинах стержней отклонение оказывалось допустимым с технической точки зрения.

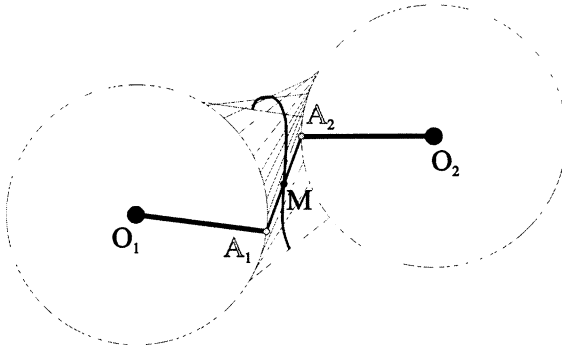


Рис. 13.18: Механизм Уатта упрощенный

Уатт столкнулся с еще одной проблемой: для создания достаточно протяженной почти прямолинейной части траектории движения точки  $M$  необходимо было разнести крепления  $O_1$  и  $O_2$  на большое расстояние, что приводило к недопустимому увеличению размеров машинного отделения. Для решения этой проблемы Уатт применил *пантографическое расширение* (*пантограф*<sup>3</sup> — прибор для перерисовки чертежей в другом масштабе), дополнив среднюю часть  $A_1A_2$  до параллелограмма  $A_1A_2B_2B_1$ , где  $A_2$  является серединой отрезка  $B_2O_2$  (в дальнейшем такой параллелограмм стали называть *параллелограммом Уатта*), см. рис. 13.19. Теперь вместо  $M$  можно взять точку  $B_1$ , у которой траектория движения вдвое больше, чем у  $M$ .

Двухсторонняя машина Уатта, благодаря своей более “регулярной” или “равномерной” работе, нашла гораздо более широкую сферу применения (мельницы, фабрики и т.п.), чем машина Ньюкомена, которая использовалась фактически только для приведения в действие насосов.

Patrick Muirhead “The Origin and Progress of the Mechanical Inventions of James Watt; Illustrated by His Correspondence”, vol. II.

<sup>3</sup>Рекомендуем читателю самостоятельно разобраться с устройством пантографа.

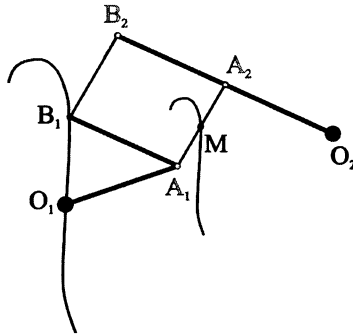


Рис. 13.19: Механизм Уатта. Параллелограмм Уатта

### 13.4.2 Лямбда-механизм и стопоходящая машина Чебышева

Другой интересный классический шарнирный механизм, переводящий вращательное движение в почти прямолинейное, был создан П.Л.Чебышевым. Он используется в так называемой “стопоходящей машине Чебышева” (ее действующий оригинал хранится в Политехническом музее г. Москвы). Вот ее внешний вид, см. рис. 13.20.

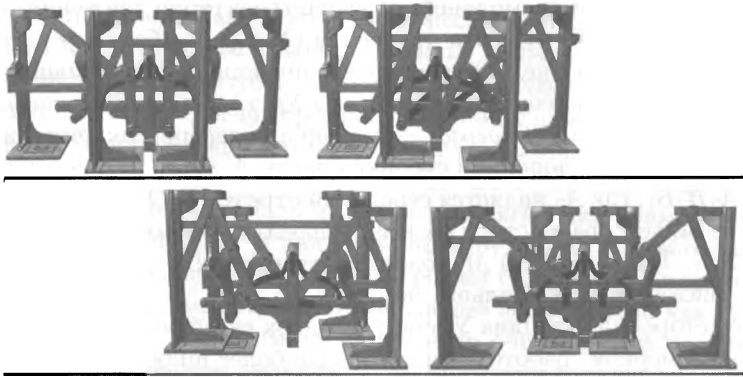


Рис. 13.20: Один шаг стопоходящей машины Чебышева

Чтобы разобраться, как “ходит” машина Чебышева, начнем с важной составной части этой машины — *лямбда-механизма*, см. рис. 13.21.

В нем точки  $O_1$  и  $O_2$  — закрепленные шарниры;  $A_1$  и  $A_2$  — подвижные шарниры;  $A_1$  — середина стержня  $A_2B$ ; точка  $A_2$  движется по окружности, при этом свободный конец  $B$  описывает замкнутую кривую  $\gamma$ , изображенную на рисунке.

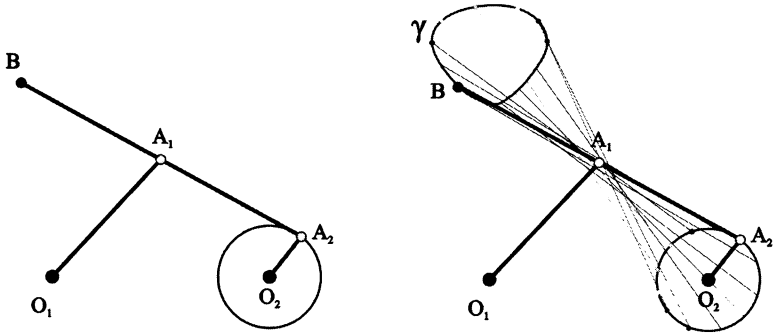


Рис. 13.21: Лямбда-механизм

Отметим, что верхняя часть кривой  $\gamma$  достаточно прямолинейна (подбирая соотношения между длинами стержней и расстоянием между точками  $O_1$  и  $O_2$ , можно добиться большей прямолинейности соответствующего участка кривой  $\gamma$ ). Кроме того, верхняя часть кривой  $\gamma$  соответствует левой части окружности, по которой вращается точка  $A_2$ .

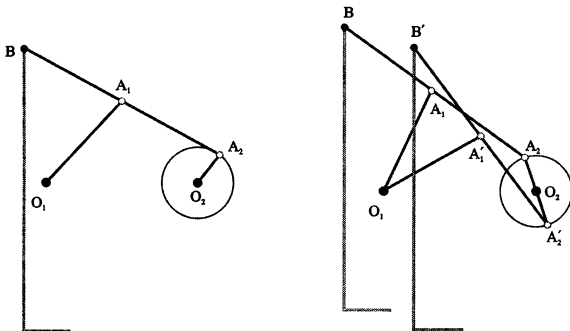


Рис. 13.22: Лямбда-механизм с ногой, а также его удвоение



Прикрепим теперь к точке  $B$  “ногу”. Добавим к полученной конструкции ее копию, которая получается, если переместить  $A_2$  в диаметрально противоположную точку. Теперь в нашем механизме уже две ноги, рис. 13.22.

Добавив симметричную копию и соединив ее с исходной, получим механизм на четырех ногах. Это и есть стопоходная машина Чебышева, рис. 13.23.

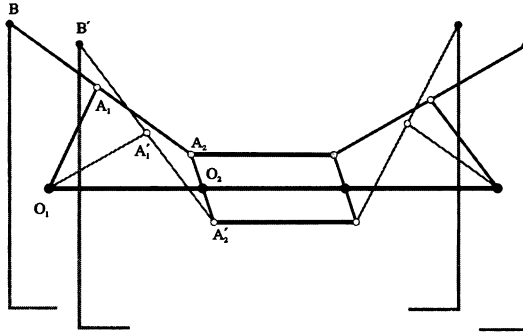


Рис. 13.23: План стопоходной машины Чебышева

На рис. 13.24 показано трехмерное изображение полученной конфигурации стержней и шарниров.

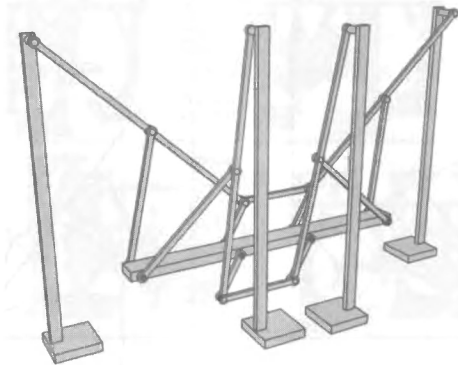


Рис. 13.24: Трехмерный вид машины Чебышева

### 13.4.3 Инверсор Поселье

Ни Уатту, ни Чебышеву, ни многим другим исследователям так и не удалось построить шарнирный механизм, который превращал бы круговое движение в точное прямолинейное. Тем большее изумление вызвало в кругах математиков изобретение такого механизма, сделанное морским офицером Поселье (Charles-Nicolas Peaucellier) в 1864 году. Это механизм реализует инверсию, и потому называется *инверсором Поселье*. Об истории, с ним связанной, говорилось выше.

В этой связи читателю будет интересно обдумать, почему кривошипно-шатунный механизм, широко использующийся в настоящее время, в частности, для преобразования в двигателях внутреннего сгорания возвратно-поступательного движения поршней в круговое движение маховика, не является шарнирным механизмом в нашем смысле.

## 13.5 Формализация

В данном параграфе мы обсудим математические аспекты теории шарнирных механизмов. Помимо усиления уровня строгости, формализация позволяет отвечать на инженерно не очевидные вопросы, например на то, что можно начертить с помощью шарнирных механизмов, а что нет. Более точно, теоремы существования типа теоремы Кемпе можно доказывать, объясняя, как построить соответствующий шарнирный механизм. Однако теоремы, которые утверждают, что то или иное множество *не является рисваемым*, можно доказывать, только в достаточной степени формализовав теорию.

Итак, определим, что же такое математический шарнирный механизм. Рассмотрим *взвешенный* граф  $(G, \ell)$ , где  $G = (V, E)$  — граф с множеством вершин  $V$  и множеством ребер  $E$ , а  $\ell: E \rightarrow \mathbb{R}$  — положительная вещественная функция на множестве ребер этого графа. Вершины графа  $G$  будем называть *шарнирами*, его ребра — *стержнями*, а значения функции  $\ell$  на стервне — *длиной* этого *стержня*. В качестве объемлющего пространства, в котором мы будем располагать шарнирный механизм, рассмотрим  $\mathbb{R}^d$ . Как уже говорилось, в этих лекциях мы занимались плоским случаем, т.е. случаем  $d = 2$ ; заметим, однако, что случай  $d \geq 3$  не менее интересен.

Чтобы смоделировать закрепление некоторых шарниров в объемлющем пространстве, рассмотрим подмножество  $W \subset V$ , элементы которого будем называть *неподвижными* или *граничными шарнирами*, а элементы из  $V \setminus W$ , — *подвижными* или *внутренними шарнирами*.

ми. Множество  $W$  будем обозначать через  $\partial G$  и называть *границей*. Отображение  $\partial: \partial G \rightarrow \mathbb{R}^d$  будем называть *граничным отображением*. Это отображение  $\partial$  задает положения неподвижных шарниров в объемлющем пространстве. *Шарнирным механизмом*  $\mathcal{L}$  назовем каждую тройку  $(G, \ell, \partial)$  в сделанных выше обозначениях.

Следующее понятие моделирует конкретное расположение шарнирного механизма. *Конфигурацией* шарнирного механизма  $\mathcal{L} = (G = (V, E), \ell, \partial)$  назовем отображение  $\mathcal{C}: V \rightarrow \mathbb{R}^d$ , продолжающее  $\partial$ , т.е.  $\mathcal{C}|_{\partial G} = \partial$ , и уважающее  $\ell$ , т.е. для любого ребра  $uv$  графа  $G$  должно выполняться равенство  $|\mathcal{C}(u)\mathcal{C}(v)| = \ell(uv)$ . Отметим, что не для любых функции  $\ell$  и граничного отображения  $\partial$  существует хотя бы одна конфигурация шарнирного механизма. В самом деле, если такая конфигурация существует, то для каждой тройки попарно смежных шарниров должно, по крайней мере, выполняться неравенство треугольника, что, вообще говоря, априори не предполагается.

Множество всех конфигураций шарнирного механизма  $\mathcal{L}$  назовем *конфигурационным пространством* этого механизма и будем обозначать через  $\mathcal{S}(\mathcal{L})$ . Точку  $\mathcal{C}(v) \in \mathbb{R}^d$  назовем *положением шарнира  $v$  в конфигурации  $\mathcal{C}$* . Подмножество объемлющего пространство, составленное из всевозможных положений  $\mathcal{C}(v)$ ,  $\mathcal{C} \in \mathcal{S}(\mathcal{L})$ , шарнира  $v$  обозначим через  $\mathcal{S}(\mathcal{L}, v)$  и назовем *конфигурационным множеством шарнира  $v$* . Если понятно, о каком шарнирном механизме идет речь, то вместо  $\mathcal{S}(\mathcal{L}, v)$  будем писать  $\mathcal{S}(v)$ . Отметим, что шарнир может иметь одинаковые положения в разных конфигурациях. Количество всех конфигураций, приводящих к положению  $s \in \mathcal{S}(\mathcal{L}, v)$  шарнира  $v$ , т.е. число элементов во множестве  $\{\mathcal{C} \in \mathcal{S}(\mathcal{L}) \mid \mathcal{C}(v) = s\}$ , назовем *кратностью положения  $s$* .

**Замечание 13.15.** Внимательный читатель заметил, что в рассмотренных нами в первой части лекции механизмах шарниры могли располагаться в любом месте стержня. В формальном же определении шарниры могут располагаться только в концах стержней. Это несколько нас не ограничивает. В самом деле, если в шарнирном механизме имеется стержень  $AB$  длины  $x$ , на котором на расстоянии  $y$  от  $A$  расположен шарнир  $D$ , то с точки зрения формального определения нужно рассмотреть три шарнира  $A$ ,  $B$  и  $D$ , соединенных стержнями  $AB$ ,  $AD$  и  $BD$  длин  $|AB| = x$ ,  $|AD| = y$  и  $|BD| = x - y$ .

Если для некоторого шарнирного механизма  $\mathcal{L} = (G, \ell, \partial)$  и множества  $M \subset \mathbb{R}^d$  существует конфигурация  $\mathcal{C} \in \mathcal{S}(\mathcal{L})$ , для которой  $M = \mathcal{C}(\partial G)$ , то говорят, что  $M$  можно соединить шарнирным механизмом  $\mathcal{L}$ .

Пусть  $\mathcal{L} = (G = (V, E), \ell, \partial)$  — некоторый шарнирный механизм, и  $u$  не является элементом множества  $V$ . Рассмотрим шарнирный механизм  $\mathcal{L}' = (G' = (V \cup \{u\}, E), \ell', \partial')$  и будем говорить, что  $\mathcal{L}'$  получен из  $\mathcal{L}$  добавлением шарнира  $u$ .

Представление о шарнирном механизме как о конструкции, собранной из жестких стержней, приводит к интуитивному представлению об операции добавления шарнира на стержень, или даже на прямую, содержащую стержень. Однако мы, в формальном определении, вместо стержней рассматриваем просто пары точек — “пары концов стержней”, как это принято в теории графов, поэтому, чтобы эти понятия имели смысл, дадим соответствующие определения.

**Конструкция 13.16.** Пусть  $\mathcal{L} = (G = (V, E), \ell, \partial)$  — произвольный шарнирный механизм, и  $vw \in E$  — некоторый его стержень. Построим новый шарнирный механизм  $\mathcal{L}' = (G' = (V', E'), \ell', \partial')$  следующим образом. Пусть  $u$  не является элементом из  $V$ . Положим  $V' = V \cup \{u\}$ ,  $E' = E \cup \{uv, uw\}$ ,  $\ell'|_E = \ell$ ,  $\partial G' \supset \partial G$ ,  $\partial'|_{\partial G} = \partial$ . Рассмотрим несколько вариантов, зависящих от того, как будет продолжена функция  $\ell$  на  $\{uv, uw\}$ .

(1) Функция  $\ell'$  удовлетворяет условию  $\ell'(vu) + \ell'(uw) = \ell'(vw)$  (таких функций бесконечно много). Тогда будем говорить, что шарнирный механизм  $\mathcal{L}'$  получен из  $\mathcal{L}$  добавлением шарнира  $u$  на стержень  $vw$ . Кроме того, будем говорить, что шарнир  $u$  делит стержень  $vw$  в отношении  $\ell'(vu) : \ell'(uw)$ . В частности, если это отношение равно 1, то говорят, что шарнир  $u$  помещен в середину стержня  $vw$ .

(2) Функция  $\ell'$  удовлетворяет условию  $\ell'(vw) + \ell'(wu) = \ell'(vu)$  (таких функций бесконечно много). Тогда будем говорить, что шарнирный механизм  $\mathcal{L}'$  получен из  $\mathcal{L}$  добавлением шарнира  $u$  на луч  $vw$  вне стержня  $vw$ .

(2') Если реализуется или случай (1), или случай (2), то говорим, что шарнирный механизм  $\mathcal{L}'$  получен из  $\mathcal{L}$  добавлением шарнира  $u$  на луч  $vw$ .

(3) Аналогично (2) определяется добавление шарнира  $u$  на луч  $wv$  вне стержня  $vw$ .

(3') Аналогично (2') определяется добавление шарнира  $u$  на луч  $wv$ .

(4) Если известно, что реализуется один из случаев (1), (2) или (3), то говорим, что шарнирный механизм  $\mathcal{L}'$  получен из  $\mathcal{L}$  добавлением шарнира  $u$  на прямую  $vw$ .

В каждом из рассматриваемых случаев добавленную вершину  $u$  относят или к внутренним, или к граничным. Если  $u$  отнесена к граничным вершинам, то дополнительно задают  $\partial'(u)$ .

Пусть  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$  — некоторое множество точек на стержнях шарнирного механизма  $\mathcal{L}$ , и механизм  $\mathcal{L}_U$  получается из механизма  $\mathcal{L}$  последовательным добавлением вершин  $u_i$ . Пусть  $\mathcal{L}'$  — другой шарнирный механизм, множество вершин которого содержит  $U$ . Про такой  $\mathcal{L}'$  будем говорить, что он *соединяет точки из  $U$* . Предположим дополнительно, что ограничения граничных отображений механизмов  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{L}'$  на  $U$  совпадают. Тогда, объединив множества вершин и множества ребер механизмов  $\mathcal{L}_U$  и  $\mathcal{L}'$ , мы построим новый механизм, про который будем говорить, что он получен *добавлением механизма  $\mathcal{L}'$  к механизму  $\mathcal{L}$* . Аналогичным образом можно определить более общее понятие *суммы двух механизмов* (сделайте это самостоятельно).

Пусть  $\mathcal{L} = (G = (V, E), \ell, \partial)$  и  $\mathcal{L}' = (G' = (V' E'), \ell', \partial')$  — два шарнирных механизма, причем  $V \subset V'$ ,  $E \subset E'$ ,  $\ell'|_E = \ell$  и  $\partial'|_V = \partial$ . Тогда будем говорить, что  $\mathcal{L}$  *лежит в  $\mathcal{L}'$* , или  $\mathcal{L}'$  *содержит  $\mathcal{L}$* , или  $\mathcal{L}'$  *расширяет  $\mathcal{L}$* . Отметим, что механизм, полученный из  $\mathcal{L}$  добавлением некоторого механизма, содержит  $\mathcal{L}$ .

Пусть, во введенных в предыдущем абзаце обозначениях, механизм  $\mathcal{L}$  лежит в  $\mathcal{L}'$ . Если  $C' \in \mathcal{S}(\mathcal{L}')$  — некоторая конфигурация механизма  $\mathcal{L}'$ , то ее ограничение на  $V$  является конфигурацией механизма  $\mathcal{L}$ , которую будем называть *ограничением  $C'$  на механизм  $\mathcal{L}$* . При этом множество всех ограничений конфигураций механизма  $\mathcal{L}'$  на  $\mathcal{L}$  будем называть *конфигурационным пространством модифицированного (с помощью  $\mathcal{L}'$ ) механизма  $\mathcal{L}$* . Нас будет особенно интересовать ситуация, когда  $\mathcal{L}'$  получен из  $\mathcal{L}$  добавлением некоторого механизма (см. параграф 13.5.2). Посмотрим некоторые примеры.

### 13.5.1 Пример: ромб

Рассмотрим взвешенный граф  $(G, \ell)$ , который содержит четыре вершины  $O, A, B$  и  $C$  и четыре ребра  $OA, AB, BC$  и  $CO$ ; функция  $\ell$  принимает одно значение  $a > 0$ . Неподвижным будет у нас ровно один шарнир  $O$ . Как выглядят всевозможные конфигурации этого шарнирного механизма? Легко видеть, что они могут быть или ромбом (невыврожденным или вырожденным), или замкнутой ломаной, у которой совпадают первое и четвертое, а также второе и третье звенья; или

же первое и второе, а также третье и четвертое звенья. Для каждой конфигурации  $C$  мы будем обозначать положения шарниров теми же буквами, что и сами шарниры, рис. 13.25.

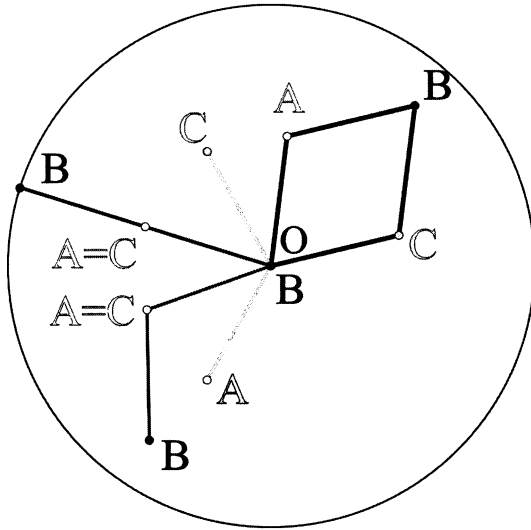


Рис. 13.25: Шарнирный ромб, параметризующий круг

Изучим конфигурационное множество  $\mathcal{S}(B)$  шарнира  $B$ . Ясно, что это множество представляет собой круг с центром в  $O$  и радиусом  $2a$ . Выясним, чему равны кратности разных положений шарнира  $B$ . Каждая точка, лежащая на граничной окружности конфигурационного множества  $\mathcal{S}(B)$ , встречается ровно в одной конфигурации, а именно, когда ромб вырожден, поэтому такие положения имеют кратность 1. Кратность каждого неграничного положения, отличного от  $O$ , равна 4 (ромб  $OABC$  и ромб, симметричный ему относительно диагонали  $OB$ , различны; также нужно учитывать конфигурации, в которых точки  $A$  и  $C$  совпадают). Наконец, когда положение точки  $B$  совпадает с точкой  $O$ , такую ситуацию реализуют ломаные, в которых совпадают первое и второе, а также третье и четвертое звенья (среди них встречаются и вырожденные ромбы), так что кратность положения  $O \in \mathcal{S}(B)$  равна бесконечности.

### 13.5.2 Укрепление шарнирного механизма: общий подход

Наличие положений высокой кратности часто приводит к чрезвычайному усложнению анализа конфигураций шарнирного механизма. Например, в случае с ромбом из раздела 13.5.1, если конфигурация задает обычный ромб, то тогда вектор  $OB$  равен сумме векторов  $OA$  и  $OC$ . Однако в случае, когда конфигурация представляет собой ломаную с совпадающими звеньями, такого равенства уже нет.

С аналогичной ситуацией мы сталкивались, когда обсуждали параллелограмм и антипараллелограмм в разделе 13.1.2.

Чтобы избежать подобных проблем, часто пытаются уменьшить кратность положений, пользуясь следующим приемом. Предположим, что конфигурационное пространство механизма  $\mathcal{L}$  разбито на две части  $\mathcal{S}_1$  и  $\mathcal{S}_2$ , причем существует такой конечный набор точек на стержнях из  $\mathcal{L}$  и такой шарнирный механизм  $\mathcal{L}'$ , для которых во всех конфигурациях из  $\mathcal{S}_1$  положения выбранных точек можно соединить механизмом  $\mathcal{L}'$ , а для каждой конфигурации из  $\mathcal{S}_2$  положения выбранных точек соединить механизмом  $\mathcal{L}'$  нельзя. Тогда если к  $\mathcal{L}$  добавить механизм  $\mathcal{L}'$ , соединяющий описанные выше точки, то конфигурационное пространство модифицированного так механизма  $\mathcal{L}$  станет равным  $\mathcal{S}_1$ . Тем самым мы, фактически, уменьшили конфигурационное пространство исходного механизма. Такая операция называется *укреплением* части  $\mathcal{S}_1$  конфигурационного пространства  $\mathcal{S}(\mathcal{L})$ . Обычно конфигурации, образующие часть  $\mathcal{S}_1$ , называются тем или иным образом, например, часть конфигураций шарнирного механизма  $\mathcal{L}$  из раздела 13.5.1 называются ромбами. Если описанным выше методом семейство  $\mathcal{S}_1$  таких конфигураций укреплено, то говорят, что укреплен ромб.

Как можно укрепить ромб  $\mathcal{L}$  из раздела 13.5.1 мы уже знаем. Добавим на ребра  $OA$  и  $BC$  их середины  $M$  и  $N$ . Отметим, что в каждой конфигурации, реализующей ромб, расстояние между точками  $M$  и  $N$  равно  $a$ . Если же реализуется замкнутая ломаная с совпадающими звеньями и эта ломаная не равна вырожденному ромбу, то расстояние между точками  $M$  и  $N$  меньше  $a$ . Таким образом, укрепляя  $\mathcal{L}$  добавлением ребра  $MN$  длины  $a$  (однореберного шарнирного механизма), мы получим механизм, который можно рассматривать как “настоящий ромб” (возможно, вырожденный).

### 13.5.3 Пример: параллелограмм и антипараллелограмм

В примере параграфа 13.5.1 изменим функцию  $\ell$ , разрешив ей принимать два различных значения  $a = \ell(OA) = \ell(BC) > 0$  и  $b = \ell(AB) = \ell(CO) > 0$ . Возможные конфигурации такого шарнирного механизма — это параллелограммы (невырожденные или вырожденные), а также *антипараллелограммы*, каждый из которых получается из параллелограмма отражением одного из треугольников, на которые его разбивает диагональ, относительно этой диагонали, рис. 13.26.

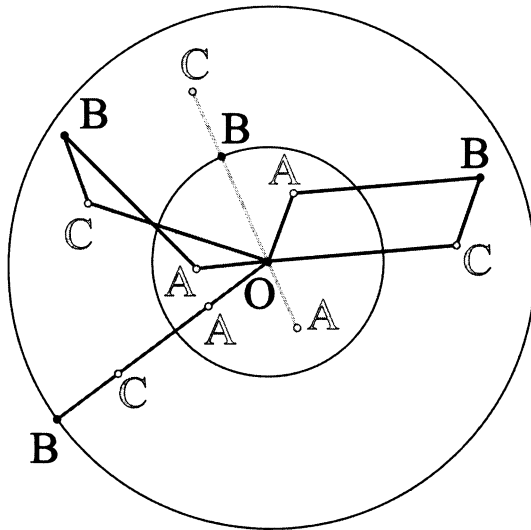


Рис. 13.26: Шарнирные параллелограмм и антипараллелограмм

Изучим конфигурационное множество точки  $B$ . Так как  $a \neq b$ , то  $S(B)$  — это кольцо с центром в  $O$ , внутренним радиусом  $|a - b|$  и внешним радиусом  $a + b$ . Все точки внешней окружности имеют кратность 1, так как каждая из них реализуется в единственном вырожденном параллелограмме. Все неграничные точки имеют кратность 4, причем для каждой такой точки  $B$  она реализуется в двух симметричных относительно  $OB$  параллелограммах, и в двух симметричных относительно  $OB$  антипараллелограммах (для ромба эти антипараллелограммы вырождаются). Наконец, все точки внутренней окружности имеют крат-



ность 1. Таким образом, для параллелограммов с разными длинами сторон в множестве  $\mathcal{S}(B)$  отсутствуют точки бесконечной кратности.

Укрепление параллелограмма и антипараллелограмма, рис. 13.27, мы уже обсуждали в разделе 13.1.3.

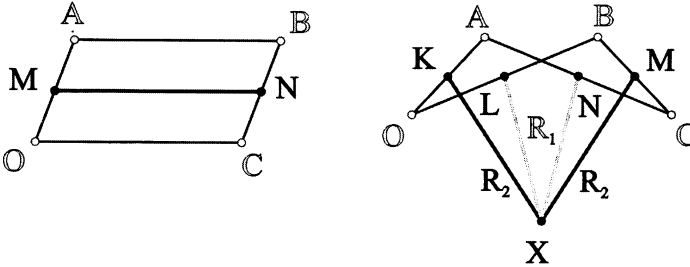


Рис. 13.27: Укрепление параллелограмма и антипараллелограмма

Отметим, что после укрепления параллелограмма и антипараллелограмма кратности внутренних точек конфигурационного пространства (отличных от начала координат в случае ромба) станут равными 2.

### 13.5.4 Как нарисовать решение уравнения?

Мы говорим, что шарнирный механизм рисует множество  $A$ , если множество  $A$  совпадает с конфигурационным пространством некоторой вершины этого механизма. Множество  $A$  называется *рисуемым*, если существует шарнирный механизм, который рисует множество  $A$ .

Мы обсудим одну общую идею, используемую в вопросе рисования множеств с помощью шарнирных механизмов. Пусть на плоскости  $\mathbb{R}^2$  с координатами  $x$  и  $y$  задан шарнирный механизм  $\mathcal{L}$ , и пусть  $v$  — некоторый подвижный шарнир из  $\mathcal{L}$ . Рассмотрим на конфигурационном множестве  $\mathcal{S}(\mathcal{L}, v)$  шарнира  $v$  некоторую функцию  $f(x, y)$  и предположим, что мы хотим расширить  $\mathcal{L}$  до такого шарнирного механизма  $\mathcal{L}'$ , в котором шарнир  $v$  двигался бы по множеству, заданному уравнением  $f(x, y) = 0$ . Как эту задачу можно было бы решить?

Предположим, что нам удастся расширить  $\mathcal{L}$  до промежуточного шарнирного механизма  $\mathcal{L}''$  такого, что  $\mathcal{S}(\mathcal{L}, v) = \mathcal{S}(\mathcal{L}'', v)$  и существует шарнир  $w$  из  $\mathcal{L}''$ , обладающий следующим свойством: для каждого положения  $s \in \mathcal{S}(\mathcal{L}'', v)$  шарнира  $v$  абсцисса ( $x$ -координата) всех положений шарнира  $w$  в конфигурациях  $\mathcal{C}'' \in \mathcal{S}(\mathcal{L}'')$ , для которых  $\mathcal{C}''(v) = s$ ,

одна и та же и равна  $f(s)$ . Можно понимать, что механизм  $\mathcal{L}''$  в некотором смысле вычисляет функцию  $f(x, y)$ .

Соединив  $\mathcal{L}''$  с инверсором Поселье, в котором шарнир  $w$  может двигаться только по (отрезку) прямой  $x = 0$ , получим механизм  $\mathcal{L}'$ , в котором точка  $v$  двигается по множеству, заданному уравнением  $f(x, y) = 0$ . Именно эта идея была использована в доказательстве теоремы Кемпе, см. раздел 13.3.2.

Обратим, однако, внимание читателя еще раз, что мы не обсуждали вопроса о том, какие множества *нельзя* нарисовать с помощью шарнирных механизмов. Вот здесь, конечно же, без формализации не обойтись.

## Литература к главе 13

- [1] <http://www.etudes.ru/ru/mov/>
- [2] <http://jeanlouis.blanchard.pagesperso-orange.fr>
- [3] <http://tcheb.ru/>
- [4] Сосинский А.Б. *Двумерные поверхности и конфигурационные пространства шарнирных механизмов. Лекция первая.* [http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option\\_lang=rus&presentid=130](http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=130)
- [5] Сосинский А.Б. *Двумерные поверхности и конфигурационные пространства шарнирных механизмов. Лекция вторая.* [http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?presentid=131&option\\_lang=rus](http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?presentid=131&option_lang=rus)
- [6] Kempe A.B. *How to draw a straight line: a lecture on linkages.* — Macmillan & Co., 1877.
- [7] Kapovich M., Millson J.J. *Universality theorems for configurations of planar linkages.* Topology, v. 41 (2002), N 6, pp. 1051–1107.
- [8] Abbott T.G. *Generalizations of Kempe's Universality Theorem* (2008) <http://web.mit.edu/tabbott/www/papers/mthesis.pdf>
- [9] King H. *Semiconfiguration spaces of planar linkages,* <http://arXiv.org:math/9810130>.
- [10] King H. *Configuration spaces of linkages in  $\mathbb{R}^n$ ,* <http://arXiv.org:math/9811138>.

## Упражнения к главе 13

**Упражнение 13.1.** Покажите, что при движении по окружности точки  $P$  из инверсора Гарта точка  $Q$  движется по прямой. Опишите “область определения” и “область значений” инверсора Гарта.

**Упражнение 13.2.** Проверьте, что конфигурационное пространство укрепленного антипараллелограмма совпадает в точности с множеством всех конфигураций, являющихся антипараллелограммами (возможно, вырожденными).

**Упражнение 13.3.** Модифицируйте инверсор Поселье и постройте шарнирный механизм, рисующий заполненный треугольник на плоскости.

**Упражнение 13.4.** Постройте шарнирный механизм, рисующий эллипс с заданными полуосями.

## Глава 14

# Симметрии плоских кристаллов

**План.** Замощения, замощения плоскости равными правильными многоугольниками, замощения плоскости правильными многоугольниками с разным числом сторон (при условии, что все вершины замощения устроены одинаково), невозможность замощения плоскости равными выпуклыми  $n$ -угольниками при  $n \geq 7$ , группа движений прямой, дискретная группа, классификация дискретных групп движений прямой, движения плоскости, поворот, осевая симметрия, сдвиг, скользящая симметрия, теорема Шалля, группы симметрий бордюров, классификация, плоская кристаллографическая (федоровская) группа, фундаментальная область, кристаллографические классы, теорема о 10 кристаллографических классах, арифметические классы, теорема о 13 арифметических классах, решетка Браве, группа Браве или сингония, тип Браве или арифметическая голоэдрия, симморфная или расщепляемая группа, классификация плоских кристаллографических групп (17 штук), 1-коцикл, когомологичные 1-коциклы, кограница, группа одномерных когомологий, многомерный случай, 7 сингоний в трехмерном случае, теоремы Бибербаха, расширение группы, теорема Цассенхауза, квазикристаллы, мозаики Пенроуза.

### 14.1 Плоские кристаллы и их группы симметрий

Теория симметрии кристаллов и орнаментов — классическая область взаимодействия геометрии, алгебры, физики, геологии, биологии и декоративного искусства. Многие физические свойства кристаллических веществ связаны с тем, что атомы или их группы расположены “правильным” или “регулярным” образом: каждое такое вещество может быть разбито на ячейки, в каждой из которых группы атомов расположены одним и тем же определенным способом, а сами эти ячейки располагаются совершенно одинаково друг относительно друга. Пожалуй, самый известный пример зависимости физических свойств от

кристаллической структуры: алмаз и графит — они состоят из атомов одного элемента — углерода, но их кристаллические структуры разные, см. рис. 14.1.

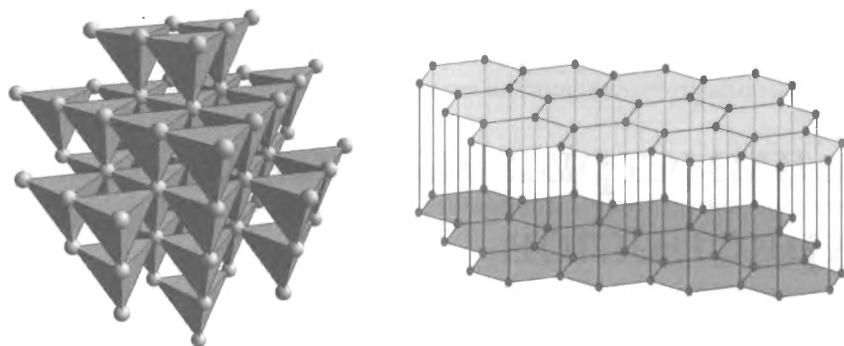


Рис. 14.1: Кристаллические структуры алмаза (слева) и графита (справа)

Аналогичным свойством обладают правильные орнаменты — узоры, характеризующиеся многократным повторением одинаковых элементов; такие узоры, в частности, с древнейших времен украшают дворцы и храмы. Пчелиные соты, правильные формы клеточного строения растений или повторяющееся расположение цветков и семян — примеры аналогичных структур в живой природе.

Оказывается, перечисление всех возможных типов кристаллической симметрии сводится к чисто математическому вопросу, в котором тесно взаимодействуют евклидова геометрия и теория групп; этот вопрос как в плоском, так и в пространственном случае был решен русским кристаллографом Евграфом Степановичем Федоровым (в 1891 и 1895 гг. соответственно): им были найдены все 17 возможных типов плоских кристаллов и все 219 типов пространственных. В этом разделе излагается двумерная теория симметрии кристаллов. Предварительно мы обсудим два более простых вопроса — о различных типах замощения плоскости и о симметриях бордюров (орнаментов, допускающих сдвиги только в одном направлении).

## 14.2 Замощения

Прежде чем обратиться к структуре (плоских) кристаллов, рассмотрим более простую задачу: *Каким плоскими фигурами можно замостить плоскость, а какими нельзя?*

И хотя этот вопрос и звучит проще, но он оказывается далеко не тривиальным; более того, здесь до сих пор имеются открытые проблемы.

**Определение 14.1.** Пусть даны несколько плоских многоугольников  $F_1, \dots, F_n$ . Будем говорить, что мы имеем *замощение* плоскости многоугольниками  $F_1, \dots, F_n$ , если плоскость представлена в виде объединения замкнутых многоугольников  $\bigcup_k G_k$ , причем

- (1) внутренности многоугольников  $G_k$  попарно не пересекаются;
- (2) каждый из многоугольников  $G_k$  разбиения равен одному из многоугольников  $F_i$ ;
- (3) ни одна вершина ни одного многоугольника  $G_k$  не лежит на стороне многоугольника  $G_i$ ; иными словами, у многоугольников  $G_i$  и  $G_k$  либо вообще нет общих точек, либо у них есть общая вершина (или несколько общих вершин), либо у них есть общая сторона (общие стороны).

**Замечание 14.2.** Бывает интересно ослабить это определение и рассматривать замощения, которые удовлетворяют свойствам (1) и (2), но, возможно, не удовлетворяют свойству (3).

**Пример 14.3.** Плоскость можно замостить

- (1) равными параллелограммами;
- (2) равными треугольниками.

**Задача 14.4.** Докажите, что плоскость можно замостить многоугольниками, равными

- (1) любому наперед заданному выпуклому четырехугольнику;
- (2) любому наперед заданному невыпуклому четырехугольнику (та же идея, что и в предыдущем случае).

Примеры описанных только что четырех типов замощений приведены на рис. 14.2.

Оказывается, замощений плоскости равными правильными  $n$ -угольниками совсем немного.

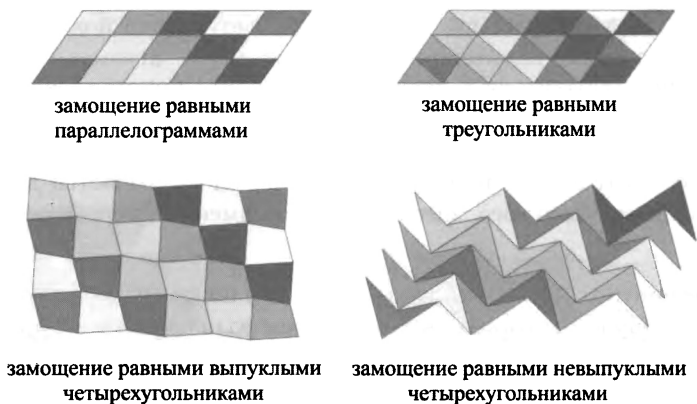


Рис. 14.2: Примеры замощений плоскости

**Теорема 14.5.** *Замощение плоскости равными правильными  $n$ -угольниками существует только для  $n = 3, 4, 6$ .*

*Доказательство.* То, что для таких  $n$  замощения существуют, легко проверить, см. рис. 14.3.

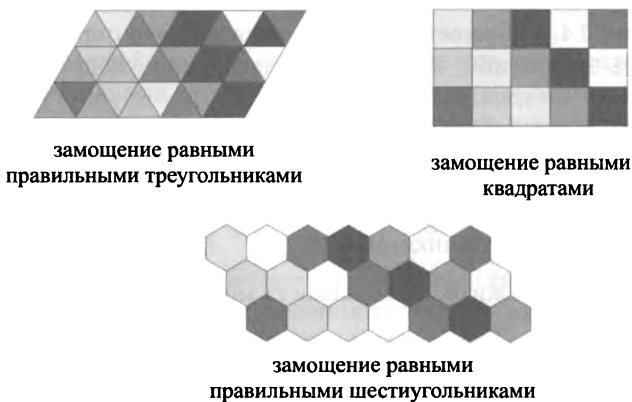


Рис. 14.3: Все возможные типы замощений плоскости равными правильными многоугольниками

Проверим, что для других  $n$  описанного замощения не существует. Угол правильного  $n$ -угольника равен  $\varphi_n = \pi(n - 2)/n$ . Рассмотрим

какую-нибудь вершин  $A$  некоторого многоугольника  $P$  из замощения. Выясним, сколько многоугольников могут иметь  $A$  вершиной. Плоские углы многоугольников, имеющих вершиной точку  $A$ , в этой точке образуют угол  $2\pi$ . Ясно, что при  $n \geq 7$  имеют место неравенства  $2\varphi_n < 2\pi < 3\varphi_n$ , поэтому в вершине  $A$  не может сходиться целое число многоугольников. При  $n = 5$  это тоже проверяется непосредственно:  $3\frac{3\pi}{5} < 2\pi < 4\frac{3\pi}{5}$ .

Дадим еще одно доказательство; использованный в нем прием может нам пригодиться в дальнейшем. Пусть в вершине  $A$  сходятся  $k$  многоугольников. Тогда  $k\frac{\pi(n-2)}{n} = 2\pi$ , откуда  $k = \frac{2n}{n-2}$ . Преобразовав это равенство, получим  $k = 2 + \frac{4}{n-2}$ . Это число может быть целым только при  $n - 2$  равном 1, 2 или 4. Откуда  $n = 3, 4$  или 6 (соответственно,  $k = 6, 4$  или 3).  $\square$

**Задача 14.6.** Останется ли верной теорема 14.5, если рассматривать замощения без выполнения условия (3) из определения 14.1 (т.е. позволить вершине одного многоугольника замощения лежать на стороне другого многоугольника замощения)?

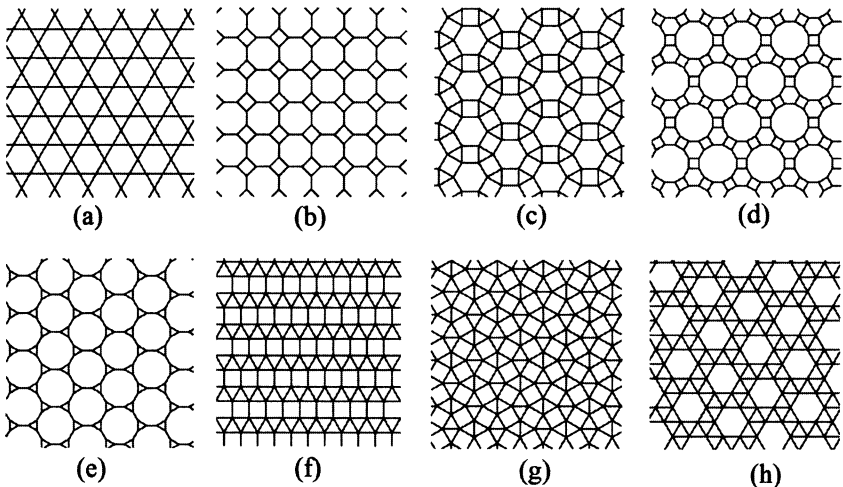


Рис. 14.4: Восемь замощений правильными многоугольниками, не все из которых равны друг другу

Теперь рассмотрим замощения правильными многоугольниками с разным числом сторон. Мы наложим на эти замощения дополнитель-



ное условие, которое неформально означает, что все вершины в замощении равноправны, а именно, потребуем, чтобы для любых двух вершин многоугольников замощения существовало движение плоскости, которое переводит одну вершину в другую и сохраняет замощение (т.е. если применить это движение к любому многоугольнику замощения, то получится многоугольник из замощения). Примеры таких замощений показаны на рис. 14.4.

Оказывается, на рис. 14.3 и 14.4 указаны все возможные варианты. Интересно, что в доказательстве мы будем использовать более простое ограничение на замощение, а именно, что в каждой вершине сходятся одинаковые наборы многоугольников, причем в одинаковом порядке (обратите, например, внимание, что на рис. 14.4: (f) и (g) приведены паркеты, в которых в каждой вершине сходятся по два квадрата и три правильных треугольника, но в разном порядке).

**Теорема 14.7.** *Существует 11 замощений плоскости правильными многоугольниками, у которых в каждой вершине многоугольники сходятся одинаковым образом. Эти замощения показаны на рис. 14.3 и 14.4.*

*Доказательство.* Пусть в каждой вершине сходятся  $k$  многоугольников. Пусть  $n_1, n_2, \dots, n_k$  — количества сторон многоугольников, имеющих общую вершину. Подсчитав углы многоугольников при этой вершине, получим равенство

$$(14.1) \quad \frac{\pi(n_1 - 2)}{n_1} + \frac{\pi(n_2 - 2)}{n_2} + \dots + \frac{\pi(n_k - 2)}{n_k} = 2\pi.$$

Ясно, что  $k$  не превышает 6, в противном случае сумма в левой части равенства 14.1 не меньше  $7\pi/3$ , что превышает  $2\pi$ .

Если  $k = 6$ , то тогда  $n_1 = n_2 = \dots = n_6 = 3$ , в противном случае левая часть равенства 14.1 снова окажется больше  $2\pi$ . Соответствующее замощение мы видели на рис. 14.3, слева сверху.

Далее утверждение теоремы доказывается несложным перебором. Покажем, например, как он проводится для  $k = 3$ . Равенство

$$\frac{\pi(n_1 - 2)}{n_1} + \frac{\pi(n_2 - 2)}{n_2} + \frac{\pi(n_3 - 2)}{n_3} = 2\pi$$

перепишем в виде

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}.$$

Для определенности будем считать, что  $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ . Легко видеть, что  $n_1 \leq 6$ , в противном случае  $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}$  меньше  $\frac{1}{2}$ .

Еще одно соображение, которое упростит нам перебор, состоит в следующем:  $n_2$ -угольники и  $n_3$ -угольники, граничащие с данным  $n_1$ -угольником, должны чередоваться, если мы будем обходить стороны  $n_1$ -угольника последовательно. Но тогда  $n_1$  чётно или же  $n_2 = n_3$ .

Нам надо рассмотреть четыре случая:  $n_1 = 3, 4, 5, 6$ .

(1)  $n_1 = 3$ . В этом случае  $n_2 = n_3$  и

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_2}.$$

Отсюда  $n_2 = 12$  и этот случай реализуется, см. рис. 14.4: (e).

(2)  $n_1 = 4$ . В этом случае

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3},$$

откуда

$$n_2 = 4 + \frac{16}{n_3 - 4}.$$

Тем самым  $n_3 - 4$  делит 16, и мы получаем три варианта троек  $(n_1, n_2, n_3)$ :

$$(4, 5, 20), (4, 6, 12), (4, 8, 8).$$

Первый вариант невозможен, как отмечалось выше, потому что вокруг пятиугольника должны поочередно располагаться четырехугольники и двадцатиугольники. Оставшиеся два варианта реализуются, см. рис. 14.4: (d) для  $(4, 6, 8)$  и (b) для  $(4, 8, 8)$ .

(3)  $n_1 = 5$ . В этом случае

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_2},$$

откуда

$$\frac{3}{10} = \frac{2}{n_2},$$

что невозможно.

(4)  $n_1 = 6$ . Легко видеть, что  $n_1 = n_2 = n_3 = 6$  подходит и соответствующее замощение приведено на рис. 14.4: (h).

Если же  $n_3 > 6$ , то сумма  $\frac{1}{3} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}$  будет строго меньше  $\frac{1}{2}$ .

Случаи  $k = 4$  и  $k = 5$  исследуются аналогичным образом, мы оставим их читателям. Например, при  $k = 5$  нужно сначала заметить, что  $n_1 = n_2 = n_3 = 3$ . Также здесь стоит обратить внимание на решение  $(n_1, n_2, n_3, n_4) = (3, 4, 4, 6)$ . Для него возможны два порядка примыкания многоугольников в вершине, один из которых реализуется (рис. 14.4: (c)), а другой — нет. Также интересен случай

$(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) = (3, 3, 3, 4, 4)$  — для него реализуются разные порядки примыкания многоугольников в вершине, см. рис. 14.4: (f) и (g).  $\square$

**Задача 14.8.** Закончите доказательство предыдущей теоремы.

Обратимся теперь к вопросу о том, какие замощения возможны равными, но, вообще говоря, не правильными  $n$ -угольниками. Случаи  $n = 3$  и  $n = 4$  были разобраны выше, см. рис. 14.2. Равными правильными пятиугольниками замостить плоскость нельзя. Однако существует пример пятиугольника, копиями которого можно замостить плоскость.

**Задача 14.9.** Найдите хотя бы один пятиугольник, копиями которого можно замостить плоскость.

Равными правильными шестиугольниками можно замостить плоскость. Нетрудно проверить, что можно замостить плоскость равными центрально симметричными шестиугольниками (и невыпуклыми тоже, убедитесь в этом).

**Задача 14.10. а)** Покажите как равными центрально симметричными шестиугольниками (как выпуклыми, так и не выпуклыми) замостить плоскость.

**б)** Придумайте невыпуклый шестиугольник, копиями которого нельзя замостить плоскость.

**с)** Придумайте выпуклый шестиугольник, копиями которого нельзя замостить плоскость.

**Задача 14.11.** Для любого  $n \geq 7$  придумайте пример невыпуклого  $n$ -угольника, копиями которого можно замостить плоскость.

А вот с выпуклыми  $n$ -угольниками ситуация совершенно противоположная. Доказательство следующего факта использует довольно хитрые оценки и теорему Эйлера.

**Теорема 14.12.** Равными выпуклыми  $n$ -угольниками при  $n \geq 7$  нельзя замостить плоскость.

*Доказательство.* От противного, предположим, что такое замощение существует. Пусть наш многоугольник можно поместить в круг диаметра  $D$ . Рассмотрим на плоскости квадрат  $K_1$  со стороной  $L$ , где  $L$

достаточно большое. Ниже мы увидим, что  $L = 64D$  подойдет. Обозначим через  $K_2$  и  $K_3$  квадраты со сторонами  $L + 2D$  и  $L + 4D$  соответственно, у которых центры совпадают с центром  $K_1$ , а стороны параллельны сторонам  $K_1$ .

Обозначим через  $M_1$  многоугольник, составленный из  $n$ -угольников замощения, имеющих хотя бы одну общую точку с квадратом  $K_1$ . Аналогично, рассмотрим многоугольник  $M_2$ , составленный из  $n$ -угольников разбиения, имеющих хотя бы одну общую точку с квадратом  $K_2$ . Ясно, что (см. рис. 14.5.)

$$K_1 \subset M_1 \subset K_2 \subset M_2 \subset K_3.$$

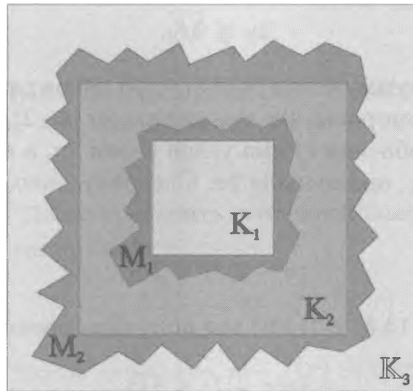


Рис. 14.5: Доказательство теоремы 14.12

Обозначим через  $v_k, e_k, f_k$  ( $k = 1, 2$ ) количества вершин, ребер и граней разбиения многоугольника  $M_k$  на  $n$ -угольники замощения.

Теперь выведем несколько неравенств.

По теореме Эйлера  $v_2 - e_2 + f_2 = 1$ , откуда

$$(14.2) \quad v_2 + f_2 > e_2.$$

Теперь оценим  $e_2$ . Из вершин многоугольника  $M_2$ , принадлежащих  $M_1$ , выходят не меньше 3 ребра (это единственное место, где мы пользуемся выпуклостью!). С другой стороны, в некоторых из оставшихся вершин  $M_2$  (точнее, в некоторых из тех вершин, которые принадлежат границе  $M_2$ ) сходятся только по 2 ребра. Однако все такие вершины

содержатся в  $M_2 \setminus M_1$ , поэтому их количество не больше  $v_2 - v_1$ . Отсюда имеем неравенство для количества всех ребер  $e_2$ :

$$(14.3) \quad 3v_1 + 2(v_2 - v_1) \leq 2e_2,$$

откуда

$$(14.4) \quad v_1 + 2v_2 \leq 2e_2.$$

Из неравенств (14.2) и (14.4) следует, что

$$v_1 + 2v_2 \leq 2v_2 + 2f_2,$$

иными словами,

$$(14.5) \quad v_1 \leq 2f_2.$$

Теперь оценим сумму углов всех  $n$ -угольников разбиения, составляющих  $M_1$ . С одной стороны, эта сумма равна  $\pi(n-2)f_1$ . С другой стороны, в вершинах разбиения сумма углов равна  $2\pi$ , а в вершинах, попавших на границу  $M_1$ , она меньше  $2\pi$ . Следовательно,  $2\pi v_1 > \pi(n-2)f_1$ , т.е.

$$(14.6) \quad (n-2)f_1 < 2v_1.$$

Из неравенств (14.5) и (14.6) мы получаем оценку

$$(n-2)f_1 < 4f_2.$$

Теперь свяжем обе части этого неравенства с площадями квадратов  $K_1$  и  $K_3$ . Обозначим через  $S$  площадь  $n$ -угольника замощения. Легко видеть, что площадь  $K_1$  не превышает площади  $M_1$ , которая равна  $S f_1$ . Наоборот, площадь  $M_2$  не превышает площади многоугольника  $M_2$ , которая равна  $S f_2$ . Отсюда и из последнего неравенства следует, что

$$(n-2)L^2 < 4(L+4D)^2.$$

Это неравенство приводится к виду

$$(n-6)L^2 - 32LD - 64D^2 < 0,$$

ясно, что оно неверно при достаточно больших по сравнению с  $D$  значении  $L$  (именно тут мы пользуемся тем, что  $n \geq 7$ ). Например, легко проверить, что оно неверно при  $L = 64D$ . Полученное противоречие доказывает теорему.  $\square$

## 14.3 Группа движений прямой и ее дискретные подгруппы

Для дальнейшего нам понадобятся сведения о группах движений прямой и плоскости. Напомним, что движение  $g$  — это отображение прямой (плоскости) на себя, сохраняющее расстояние между точками, т.е. такое, что  $|g(A)g(B)| = |AB|$  для любых точек  $A, B$  прямой (плоскости). Начнем с более простого случая движений прямой; прежде всего, опишем всевозможные движения. Для этого выберем на прямой точку  $O$  — начало аффинной системы координат, и вектор  $\vec{e}$  единичной длины. Тем самым мы зафиксировали на прямой декартову систему координат, в которой точке  $P$  соответствует координата  $x$ , определяемая условием

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{e}.$$

**Лемма 14.13.** *Любое движение прямой в указанных координатах имеет вид  $x \mapsto \varepsilon x + b$ , для некоторых  $\varepsilon = \pm 1$  и  $b$  — вещественного числа.*

*Доказательство.* Легко проверить, что описанные преобразования являются движениями прямой:

$$|x - y| = |(\varepsilon x + b) - (\varepsilon y + b)|.$$

Докажем, что любое движение  $x \mapsto f(x)$  задается такой формулой. Рассмотрим преобразование  $g : x \mapsto f(x) - b$ , где  $b = f(0)$ . Очевидно, что  $g$  — движение, и что  $g(0) = 0$ . Поскольку  $|x| = |x - 0| = |g(x) - g(0)| = |g(x)|$ , то  $g(x) = \pm x$ . Докажем, что для всех  $x$  выполняется либо  $g(x) = x$ , либо  $g(x) = -x$ . Предположим противное, а именно, что существуют ненулевые  $x_1$  и  $x_2$ , для которых  $g(x_1) = x_1$  и  $g(x_2) = -x_2$ . Но тогда  $|x_1 - x_2|$  должно быть равно  $|g(x_1) - g(x_2)| = |x_1 + x_2|$ , что невозможно.

Таким образом,  $f(x) = g(x) + b = \varepsilon x + b$ . □

**Замечание 14.14.** Легко понять, что  $T_b : x \mapsto x + b$  — это параллельные перенос (на вектор  $b\vec{e}$ ), а  $S_a : x \mapsto 2a - x$  — это симметрия относительно точки с координатой  $a$ .

Ясно, что все движения прямой образуют группу (относительно композиции); нам понадобятся ее подгруппы, обладающие следующим свойством дискретности.

**Определение 14.15.** Группа  $G$  движений прямой (плоскости) называется *дискретной*, если у любой точки  $x$  прямой (плоскости) существует такая окрестность, в которой нет отличных от  $x$  точек вида  $g(x)$ , где  $g \in G$ .

В этом разделе мы изучим всевозможные **дискретные** группы движений прямой. Выясним сперва, как устроены параллельные переносы, содержащиеся в таких группах; ясно, что они образуют в них подгруппы.

**Лемма 14.16.** Пусть  $G$  — дискретная группа движений прямой, в которой содержится хотя бы один параллельный перенос. Тогда подгруппа параллельных переносов, содержащихся в группе  $G$ , состоит из параллельных переносов вида  $T_{kb}$ , где  $k \in \mathbb{Z}$  — любое, а  $b$  — некоторое фиксированное число.

Иными словами, в  $G$  есть перенос на кратчайший вектор, а остальные переносы в  $G$  — его целочисленные кратные.

*Доказательство.* Ясно, что композиция любых двух переносов — тоже перенос (единичный элемент группы  $G$  для удобства будем считать переносом на нулевой вектор), обратный к переносу — перенос, и поэтому множество всех переносов в  $G$  — подгруппа.

Выберем на прямой некоторую точку  $A$ . Группа  $G$  дискретна, поэтому найдется такая  $\delta$ -окрестность точки  $A$ , в которой нет других точек, полученных из  $A$  движениями из группы  $G$ , в том числе параллельными переносами из  $G$ . Следовательно, параллельные переносы из группы  $G$  сдвигают точки на векторы длины не меньше  $\delta$ .

Выберем в группе  $G$  параллельный перенос  $T_{b_1}$ . Если подгруппа параллельных переносов не совпадает с  $T_{kb_1}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , выберем в  $G$  перенос  $T_c$ , не кратный  $T_{b_1}$ , и найдем такое  $k$ , чтобы  $c$  лежало между  $kb$  и  $(k+1)b$ . Тогда оба переноса  $T_{kb_1-c}$  и  $T_{(k+1)b_1-c}$  лежат в  $G$ , и по крайней мере один из них — перенос на вектор длины не превосходящей  $b_1/2$ . Обозначим это параллельный перенос через  $T_{b_2}$ .

Будем повторять эти рассуждения и построим последовательность  $b_1, b_2, \dots$ , в которой  $|b_{n+1}| \leq |b_n|/2$ . Эти рассуждения не могут продолжаться до бесконечности, поскольку в противном случае найдется  $n$ , для которого

$$|b_n| \leq |b_1|/2^{n-1} < \delta,$$

т.е. перенос  $T_{b_n}$  окажется переносом на вектор длины меньше  $\delta$ .

Это значит, что на каком-то шаге наших рассуждений (т.е. для некоторого  $n$ ) мы обнаружим, что вся подгруппа параллельных переносов в  $G$  совпадает с подгруппой, порожденной переносом  $T_{b_n}$ .  $\square$

**Теорема 14.17** (Классификация дискретных групп движений прямой). *Любая дискретная группа  $G$  движений прямой имеет вид*

- (1)  $G$  тривиальная, т.е.  $G = \{e\}$ ;
- (2)  $G$  порождается одной симметрией  $S_a$ , т.е.  $G = \{e, S_a\}$ ;
- (3)  $G$  порождается параллельным переносом  $T_b$ , т.е.  $G = \{T_{kb} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ;
- (4)  $G$  состоит из параллельных переносов  $T_{kb}$  и симметрий  $S_{a+kb/2}$  для всех  $k \in \mathbb{Z}$  и некоторых  $a, b$ , т.е.  $G = \{T_{kb}, S_{a+kb/2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ , эта группа порождается параллельным переносом  $T_b$  и симметрией  $S_a$ .

Любые две группы, относящиеся к одному из типов (2)–(4), сопряжены друг с другом в группе аффинных преобразований прямой (напомним, что две подгруппы  $G$  и  $H$  группы  $K$  сопряжены, если существует  $k \in K$ , для которого  $G = k^{-1}Hk$ ).

*Доказательство.* Предположим сначала, что в нашей группе  $G$  нет параллельных переносов. Тогда  $G$  — это одна из групп пунктов (1) или (2). В самом деле, движения прямой могут быть только двух типов: параллельные переносы или симметрии. Если в группе  $G$  есть две симметрии  $S_p$  и  $S_q$  относительно разных точек, то в группе обязательно есть параллельный перенос  $T_{2(q-p)}$ , поскольку  $S_p \circ S_q = T_{2p-2q}$ :

$$S_p \circ S_q(x) = S_p(S_q(x)) = S_p(2q - x) = 2p - (2q - x) = x + (2p - 2q).$$

Пусть в группе  $G$  есть хотя бы один параллельный перенос. Поскольку  $G$  дискретна, по лемме 14.16 найдется такой параллельный перенос  $T_b$ , что все остальные параллельные переносы в группе  $G$  являются его целочисленными кратными, т.е. имеют вид  $T_{kb}$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ .

Если в группе нет симметрий, то мы имеем случай (3).

Наконец, если в группе  $G$  имеются параллельные переносы  $T_{kb}$  и хотя бы одна симметрия  $S_a$ , то в ней имеются также симметрии  $S_{a+kb/2}$ , поскольку  $T_{kb}S_a = S_{a+kb/2}$ :

$$T_{kb} \circ S_a(x) = T_{kb}(S_a(x)) = T_{kb}(2a - x) = kb + 2a - x = S_{a+kb/2}(x).$$

Покажем, что других симметрий в группе  $G$  не может быть. От противного, пусть в группе  $G$  есть симметрия  $S_p$ , где  $p \neq a + kb/2$ . Выберем  $k$  так, чтобы расстояние от точки  $p$  до точки  $a + kb/2$  было



меньше  $|b|/2$ . Такое  $k$  найдется, потому что расстояние между соседними точками вида  $a + kb/2$  в точности равно  $|b|/2$ . Но тогда композиция симметрий  $S_{a+kb/2}S_p$  является параллельным переносом  $S_{2a+kb-p}$  на вектор, длина которого меньше  $|b|$ . Но, как мы уже знаем, переносов, отличных от  $T_{kb}$ , в группе  $G$  нет.

Докажем теперь, что все подгруппы вида (2) сопряжены в группе движений (это утверждение сильнее, чем требуется). Пусть  $G_1 = \{S_p\}$  и  $G_2 = \{S_q\}$ . Рассмотрим параллельный перенос  $H = T_{p-q}$ . Легко проверить, что  $H^{-1}S_pH = S_q$ :

$$\begin{aligned} H^{-1} \circ S_p \circ H(x) &= T_{q-p} \circ S_p \circ T_{p-q}(x) = T_{q-p} \circ S_p(x + p - q) = \\ &= T_{q-p}(2p - (x + p - q)) = T_{q-p}(p + q - x) = 2q - x = S_q(x). \end{aligned}$$

Рассмотрим случай (3) и покажем, что две такие группы сопряжены в группе аффинных преобразований прямой.

Пусть  $G_1 = \{T_{kb} \mid k \in \mathbb{Z}\}$  и  $G_2 = \{T_{kc} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Достаточно подобрать такой элемент  $H$  в группе аффинных преобразований прямой, чтобы  $H^{-1}T_bH = T_c$ . Тогда  $H^{-1}G_1H = G_2$ .

Рассмотрим гомотегию  $H(x) = ax$ , где коэффициент  $a$  выбран так, что  $ac = b$ . Тогда  $H^{-1}T_bH = T_c$ :

$$\begin{aligned} H^{-1} \circ T_b \circ H(x) &= H^{-1} \circ T_b(ax) = \\ &= H^{-1}(ax + b) = \frac{1}{a}(ax + b) = x + c = T_c(x). \end{aligned}$$

Рассмотрим, наконец, случай (4). Пусть группа  $G_1$  параллельным переносом  $T_b$  и центральной симметрией  $S_p$ , а группа  $G_2$  — параллельным переносом  $T_c$  и центральной симметрией  $S_q$ . Нам нужно подобрать такой элемент  $H$  в группе аффинных преобразований прямой, для которого  $H^{-1}T_bH = T_c$  и  $H^{-1}S_pH = S_q$ , тогда и  $H^{-1}G_1H = G_2$ . В качестве такого  $H$  рассмотрим композицию гомотегии и сдвига  $H(x) = ax + d$ , коэффициенты которой мы подберем позже. Вычислим  $H^{-1}T_bH = T_c$ :

$$\begin{aligned} H^{-1} \circ T_b \circ H(x) &= H^{-1} \circ T_b(ax + d) = \\ &= H^{-1}(ax + d + b) = \frac{1}{a}(ax + b) = x + b/a. \end{aligned}$$

Это будет равно  $T_c(x)$ , если мы положим  $a$  таким, что  $ac = b$ . Вычислим  $H^{-1}S_pH = T_c$ :

$$\begin{aligned} H^{-1} \circ S_p \circ H(x) &= H^{-1} \circ S_p(ax + d) = \\ &= H^{-1}(2p - ax - d) = \frac{1}{a}(2p - ax - 2d) = 2(p - d)/a - x. \end{aligned}$$

Это будет равно  $S_q(x)$ , если мы выберем  $d$  так, чтобы  $(p - d)/a = q$ .  $\square$

## 14.4 Движения плоскости

Рассмотрим теперь движения плоскости. Ясно, что повороты, осевые симметрии (отражения относительно прямых) и параллельные переносы (сдвиги) — движения; ниже мы убедимся, что любое движение разлагается в композицию перечисленных.

Более того, оказывается, что нами перечислены почти все движения: чтобы получить полный список нужно к перечисленным выше добавить скользящие симметрии.

**Определение 14.18.** *Скольльзящей симметрией* называется композиция отражения относительно прямой со сдвигом на вектор, параллельный этой прямой.

Заметим, что в определении скользящей симметрии неважно, в каком порядке берется композиция: результат от этого не зависит.

**Теорема 14.19** (Шаля). *Любое движение плоскости является сдвигом, поворотом или скользящей симметрией.*

*Доказательство.* Пусть  $A, B, A_1, B_1$  — четыре точки плоскости, причем  $|AB| = |A_1B_1| \neq 0$ . Прямая  $AB$  делит плоскость на полуплоскости  $\alpha, \beta$  (пусть, для определенности, полуплоскость  $\alpha$  лежит слева от луча  $AB$ ), а прямая  $A_1B_1$  — на полуплоскости  $\alpha_1, \beta_1$  ( $\alpha_1$  лежит слева от луча  $A_1B_1$ ). Докажем, что существует не более одного движения, переводящего точку  $A$  в точку  $A_1$ , точку  $B$  в точку  $B_1$ , и полуплоскость  $\alpha$  в полуплоскость  $\alpha_1$ , а также не более одного, переводящего  $A$  в  $A_1$ ,  $B$  в  $B_1$ , и  $\alpha$  в  $\beta_1$ . Действительно, пусть  $g(A) = A_1, g(B) = B_1, g(\alpha) = \alpha_1$ , и пусть  $Q$  — произвольная точка плоскости, не лежащая на прямой  $AB$ . Движение  $g$  переводит треугольник  $ABQ$  в равный ему треугольник  $A_1B_1Q_1$ , где  $Q_1 = g(Q)$ ; таких треугольников с заданными вершинами  $A_1, B_1$  ровно два: один лежит в полуплоскости  $\alpha_1$ , а второй — в полуплоскости  $\beta_1$ . Условие  $g(\alpha) = \alpha_1$  отбирает один из них: если  $Q \in \alpha$ ,

то  $Q_1 \in \alpha_1$ , а если  $Q \in \beta$ , то  $Q_1 \in \beta_1$ . Таким образом, образ точки  $Q$  определен однозначно (это тем более верно для точек, лежащих на прямой  $AB$  — образ такой точки задается расстояниями  $|Q_1A_1| = |QA|$  и  $|Q_1B_1| = |QB|$ ), т.е. движение  $g$  (если оно существует) единственно. Аналогично доказывается единственность движения  $h$ , для которого  $h(A) = A_1$ ,  $h(B) = B_1$ ,  $h(\alpha) = \beta_1$ .

Теперь докажем, что существует поворот или сдвиг, переводящий  $A$  в  $A_1$ ,  $B$  в  $B_1$ , и  $\alpha$  в  $\alpha_1$ , а также скользящая симметрия, переводящая  $A$  в  $A_1$ ,  $B$  в  $B_1$ , и  $\alpha$  в  $\beta_1$ . Действительно, пусть прямые  $AB$  и  $A_1B_1$  не параллельны. Тогда угол  $\varphi$  искомого поворота равен углу от луча  $AB$  к лучу  $A_1B_1$ , а центр  $O$  лежит на серединном перпендикуляре к отрезку  $AA_1$  и обладает тем свойством, что угол от луча  $OA$  к лучу  $OA_1$  равен  $\varphi$ : все точки, удовлетворяющие последнему условию, образуют дугу окружности, стягиваемую хордой  $AA_1$  (проверьте, что такой поворот — искомым!). Скользящая симметрия строится следующим образом (проверьте!): ось симметрии  $l$  — биссектриса угла с вершиной в середине отрезка  $AA_1$  и сторонами, параллельными лучам  $AB$  и  $A_1B_1$ , а длина вектора сдвига равна расстоянию между проекциями точек  $A$ ,  $A_1$  на прямую  $l$ . Если же прямые  $AB$  и  $A_1B_1$  параллельны, то в качестве поворота или сдвига надо взять центральную симметрию относительно середины отрезка  $AA_1$  (если лучи  $AB$  и  $A_1B_1$  направлены в противоположные стороны) или сдвиг на вектор  $AA_1$  (если эти лучи сонаправлены); скользящая симметрия строится так же, как ранее.

Из доказанного легко вывести утверждение теоремы. Действительно, пусть  $g$  — произвольное движение, и пусть  $A$ ,  $B$  — различные точки плоскости; положим  $A_1 = g(A)$ ,  $B_1 = g(B)$ . По доказанному, существует ровно два движения, переводящих  $A$  в  $A_1$ , и  $B$  в  $B_1$ , причем одно из них — поворот или сдвиг, а другое — скользящая симметрия. С другой стороны,  $g$ , очевидно, — одно из этих движений.  $\square$

**Замечание 14.20.** Из доказательства этой теоремы видно, что если движение имеет в точности одну неподвижную точку, то это поворот. Если движение имеет две неподвижные точки, то неподвижными являются все точки прямой, соединяющей эти две, и, если больше неподвижных точек нет, то это движение — отражение относительно прямой, состоящей из неподвижных точек. Если есть хотя бы три неподвижные точки, не лежащие на одной прямой, то движение является тождественным преобразованием. Наконец, если у движения неподвижных точек вовсе нет, то это перенос, если оно сохраняет ориентацию, и скользящая симметрия (с ненулевым сдвигом), если оно меняет ориентацию.

**Замечание 14.21.** Из доказанной теоремы вытекает, что всякое движение — композиция сдвига и ортогонального преобразования (т.е. движения, оставляющего на месте фиксированную точку  $O \in \mathbb{R}^2$  — начало координат). В частности, в декартовых координатах  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  произвольное движение  $g$  записывается в виде

$$(14.7) \quad g(x) = Ax + a,$$

где  $a$  — фиксированный вектор,  $A$  — ортогональная матрица. Если определитель матрицы  $A$  равен  $+1$ , движение называется *собственным*, если  $-1$  — *несобственным*. Собственные движения сохраняют ориентацию плоскости (т.е. переводят любой правильно ориентированный репер в правильно ориентированный), несобственные меняют ее.

Выясним, какие движения соответствуют различным матрицам  $A$  и векторам  $b$ . Напомним, что ортогональная матрица порядка 2 с положительным определителем имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

а с отрицательным —

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix},$$

где  $\varphi$  — некоторое число.

Рассмотрим сначала случай  $\det A = 1$ .

Если  $A = E$ , то движение (14.7), очевидно, является параллельным переносом.

Покажем, что если  $\det A = 1$  и  $A \neq E$ , то (14.7) — поворот. Напомним, что поворот вокруг точки  $O$  на угол  $\varphi$  имеет вид  $x \mapsto Ax$  для подходящей матрицы  $A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ . Легко видеть, что поворот на угол  $\varphi$  вокруг точки с координатами  $q$  имеет вид  $x \mapsto A(x - q) + q = Ax + (E - A)q$ .

Чтобы представить в таком виде преобразование  $x \mapsto Ax + b$ , достаточно показать, что матрица  $E - A$  обратима, и положить  $q = (E - A)^{-1}b$ . Обратимость матрицы  $E - A$  следует из того, что ее определитель равен  $(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi = 2 - 2 \cos \varphi$ .

Наконец, разберем случай  $\det A = -1$ . Представим  $A$  в виде

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что движение, заданное матрицей  $A$  и нулевым вектором  $b$ , сохраняет вектор  $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi/2 \\ \sin \varphi/2 \end{pmatrix}$  и меняет знак у ортогонального ему вектора  $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} -\sin \varphi/2 \\ \cos \varphi/2 \end{pmatrix}$ . В самом деле,

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi/2 \\ \sin \varphi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi/2 \\ \sin \varphi/2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \varphi/2 \\ \cos \varphi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi/2 \\ \cos \varphi/2 \end{pmatrix}.$$

Теперь рассмотрим на плоскости аффинную систему координат с тем же началом  $O$  и новыми базисными векторами  $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ . Тогда в новых координатах наше преобразование будет иметь вид

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что это — отражение относительно прямой  $x_2 = b_2/2$  и сдвиг на вектор  $(b_1, 0)$ , т.е. скользящая симметрия.

Часто нам будет удобно пользоваться следующей записью движения в блочных матрицах:

$$(14.8) \quad \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$  — это столбец длины 3, а  $\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  — квадратная матрица порядка 3.

**Задача 14.22.** Представьте в виде (14.7) и в виде (14.8) поворот вокруг точки  $(0, 1)$  на угол  $\pi/2$ , а также скользящую симметрию относительно прямой  $y = 1$  со сдвигом на вектор  $(2, 0)$ .

**Задача 14.23.** Выясните, какое из движений получается в результате композиции:

- двух отражений относительно прямых  $l_1, l_2$ ;
- двух поворотов на углы  $\alpha, \beta$  вокруг точек  $A, B$ ;
- поворота вокруг точки  $A$  на угол  $\alpha$  и сдвига на вектор  $a$ ;
- отражения относительно прямой  $l$  и поворота вокруг точки  $A$  на угол  $\alpha$ ;

- отражения относительно прямой  $l$  и сдвига на вектор  $a$ .

Найдите параметры этих движений (вектор для сдвига, центр и угол для поворота, ось и вектор для скользящей симметрии).

## 14.5 Группы симметрий бордюров

### 14.5.1 Движения, содержащиеся в группе бордюра

Предположим, что в дискретной группе  $G$  движений плоскости имеются переносы только вдоль некоторого направления. Тогда, рассуждая точно таким же образом, как в доказательстве леммы 14.16, получим, что в нашей группе  $G$  все переносы являются целочисленными кратными некоторого переноса  $T_b$ , где  $b$  — некоторый вектор. Дискретная группа  $G$  движений плоскости, содержащая параллельные переносы только вдоль одного направления, называется *группой симметрии бордюра*. Название объясняется тем, что они реализуются как группы симметрий узоров, имеющих вид лент, бордюров или фризов.

Обозначим через  $\Gamma$  подгруппу параллельных переносов в  $G$ . Эти преобразования в виде (14.8) задаются матрицами вида

$$\begin{pmatrix} E & kb \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $k \in \mathbb{Z}$ .

В этом разделе мы опишем всевозможные группы симметрий бордюров. Мы начнем с того, что выясним, какие еще движения плоскости могут лежать в группе  $G$ .

(1) Предположим, что в группе  $G$  имеется (нетождественный) поворот вокруг некоторой точки на угол  $\varphi$ .

**Лемма 14.24.** Пусть подгруппа параллельных переносов в дискретной группе  $G$  движений плоскости имеет вид  $\Gamma = \{T_{kb} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Пусть  $G$  содержит поворот  $A$ . Тогда угол этого поворота равен  $\pi$ , т.е.  $A$  является центральной симметрией. Кроме того, группа  $G$  содержит центральные симметрии, центры которых расположены на одной прямой, параллельной направлению переносов из  $\Gamma$ ; на расстоянии  $|b|/2$  друг от друга, и других центральных симметрий в группе  $G$  нет.

*Доказательство.* Пусть поворот  $A$  задан в форме (14.8) блочной матрицей  $\begin{pmatrix} R & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , где  $R$  — ортогональная матрица с определителем 1,

а  $c$  — некоторый вектор-столбец. Пусть  $T_b = \begin{pmatrix} E & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Рассмотрим в группе  $G$  элемент

$$\begin{aligned} A^{-1}T_bA &= \begin{pmatrix} R & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & R^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Как видно, это — параллельный перенос, а поскольку все параллельные переносы, лежащие в группе  $G$ , содержатся в подгруппе  $\Gamma$ , то для поворота  $R$  имеет место равенство  $R^{-1}b = -b$ , т.е.  $R$  — поворот на угол  $\pi$ , иными словами,  $R = -E$ .

Центральную симметрию  $S_p$  относительно точки с координатами  $p$  удобно задавать формулой  $S_p(x) = 2p - x$ , или в виде (14.8) — блочной матрицей

$$\begin{pmatrix} -E & 2p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим композицию  $T_b S_p$ . Легко проверить, что

$$T_{kb} \circ S_p(x) = T_{kb}(S_p(x)) = T_{kb}(2p - x) = 2p + kb - x,$$

т.е. это — симметрия относительно точки  $p + kb/2$ . Тем самым с помощью подгруппы  $\Gamma$  и одной центральной симметрии  $S_p$  мы построили в группе  $G$  целую серию центральных симметрий, которая описана в условии теоремы.

Наконец, докажем, что других центральных симметрий в группе  $G$  нет. Пусть  $S_q$  — какая-то центральная симметрия, отличная от  $S_p$ . Тогда композиция  $S_p S_q$  является параллельным переносом:

$$S_q \circ S_p(x) = S_q(2p - x) = 2q - 2p + x,$$

откуда  $2q - 2p = kb$  для некоторого подходящего целого  $k$ . Следовательно,  $q = p + kb/2$ .  $\square$

(2) Рассмотрим теперь скользящие симметрии, лежащие в группе  $G$ . Пусть скользящая симметрия  $\tilde{L} \in G$  задается блочной матрицей  $\begin{pmatrix} A & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . В группе  $G$  имеется элемент  $\tilde{L}^{-1} T_b \tilde{L}$ . Нетрудно вычислить,

что ему соответствует блочная матрица

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & A^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Но это означает, что отражение  $A$  либо не меняет вектор  $b$ , либо меняет у него знак.

Для удобства выберем такую аффинную систему координат, чтобы параллельные переносы в группе  $G$  были вдоль первого базисного вектора. Тогда вектор  $b$  можно записать в виде  $\begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , а матрица  $A$  равна либо  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , либо  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Разберем эти два случая по отдельности.

(2а) Скользящая симметрия  $\tilde{L}$  задается матрицей  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Тогда  $\tilde{L}^2$  задается матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это преобразование является переносом в направлении второй координатной оси, перпендикулярном направлению переносов из подгруппы  $\Gamma$ , следовательно,  $c_2 = 0$ .

Легко проверить (сделайте это самостоятельно), что скользящая симметрия  $\tilde{L}$ , заданная матрицей  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , в действительности является симметрией относительно прямой  $x = c_1/2$ .

Аналогично доказательству леммы 14.24 доказывается следующее утверждение.

**Лемма 14.25.** Пусть подгруппа параллельных переносов в дискретной группе  $G$  движений плоскости имеет вид  $\Gamma = \{T_{kb} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ , причем система координат выбрана так, что параллельные переносы делаются вдоль первой (горизонтальной) координатной оси. Пусть  $G$  содержит симметрию  $L_{x=c}$  относительно (вертикальной) прямой  $x = c$ . Тогда группа  $G$  содержит симметрии  $L_{x=c+kb/2}$  относительно (вертикальных) прямых  $x = c + kb/2$ , параллельных друг другу и



расположенных на расстоянии  $|b|/2$  друг от друга; других симметрий относительно вертикальных прямых в группе  $G$  нет.

**Замечание 14.26.** Обратите внимание, что в этой лемме утверждается отсутствие других симметрий относительно вертикальных прямых, а о симметриях относительно горизонтальных прямых ничего не говорится.

**Задача 14.27.** Докажите лемму 14.25.

$$(2b) \text{ Скользящая симметрия } \tilde{L} \text{ задается матрицей } \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадрат этого преобразования  $\tilde{L}^2$  задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2c_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т.е. является переносом в горизонтальном направлении, откуда  $c_1 = kb/2$  для некоторого целого  $k$ .

Предположим, что в группе  $G$  есть еще одна скользящая  $\tilde{L}'$  такого вида, заданная матрицей  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & d_1 \\ 0 & -1 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Тогда композиция  $\tilde{L} \circ \tilde{L}'$  задается матрицей  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & c_1 + d_1 \\ 0 & 1 & c_2 - d_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , т.е.

является параллельным переносом на вектор  $(c_1 + d_1, c_2 - d_2)$ . Отсюда следует, что  $c_2 = d_2$ . Геометрический смысл коэффициента  $c_2$  очень простой:  $\tilde{L}$  является композицией симметрии относительно прямой  $y = c_2/2$  и переноса на вектор  $(c_1, 0)$  (проверьте сами). Это значит, что скользящие симметрии в группе  $G$  относительно горизонтальных прямых в действительности делаются относительно одной и той же прямой  $y = c_2/2$  (но имеют разные сдвиги). Чтобы упростить формулы, мы снова изменим аффинную систему координат так, чтобы скользящие симметрии делались относительно прямой  $y = 0$ .

Обозначим скользящую симметрию относительно прямой  $y = 0$  со сдвигом на вектор  $(c, 0)$  через  $\tilde{L}_c$ . Ясно, что если  $\tilde{L}_c \in G$ , то  $\tilde{L}_{c+kb} \in G$  для всех целых  $k$ . Как мы уже видели, если  $\tilde{L}_c \in G$ , то  $2c = kb$  для некоторого целого  $k$ . Тогда для некоторого  $k_0$  мы получим, что  $c + k_0b$  равно либо 0, либо  $b/2$ . В первом случае в группе  $G$  имеется преобразование  $\tilde{L}_0$ , которое является симметрией относительно прямой  $y = 0$ , а

во втором в группе  $G$  имеется преобразование  $\tilde{L}_{b/2}$ . Легко видеть, что оба случая одновременно не могут реализоваться, так как в противном случае в группе  $G$  лежал бы перенос  $\tilde{L} \circ \tilde{L}_{b/2}$  на вектор  $b/2$ .

Итак, мы доказали следующее утверждение.

**Лемма 14.28.** Пусть подгруппа параллельных переносов в дискретной группе  $G$  изометрий плоскости имеет вид  $\Gamma = \{T_{kb} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ , причем система координат выбрана так, что параллельные переносы делаются вдоль первой (горизонтальной) координатной оси. Пусть  $G$  содержит скользящую симметрию  $\tilde{L}$  относительно прямой  $y = 0$ . Тогда множество всех скользящих симметрий в горизонтальном направлении в группе  $G$  имеет вид либо

$$(14.9) \quad \{\tilde{L}_{kb} \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

либо

$$(14.10) \quad \{\tilde{L}_{(2k+1)b/2} \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

**Замечание 14.29.** Обратите внимание, что множества (14.9) и (14.10) не являются подгруппами в  $G$ .

## 14.5.2 Классификация групп

Соберем вместе информацию о преобразованиях из группы симметрии бордюра, которую мы получили выше.

(1) Группа  $G$  может совпадать со своей подгруппой параллельных переносов, см. рис. 14.6.



Рис. 14.6: Группа  $G$  совпадает с подгруппой параллельных переносов

(2) Если группа  $G$  содержит одну центральную симметрию, то к ней применима лемма 14.24. Случай, когда в группе  $G$  других элементов нет, реализуется бордюром из рис. 14.7.

(3) Если группа  $G$  содержит симметрию относительно вертикальной прямой, то к ней применима лемма 14.25. Случай, когда в группе  $G$  других элементов нет реализуется бордюром из рис. 14.8.

(4) и (5). Если группа  $G$  содержит скользящую симметрию относительно горизонтальной прямой, то к ней применима лемма 14.28.



Рис. 14.7: Группа  $G$  состоит из переносов и центральных симметрий



Рис. 14.8: Группа  $G$  состоит из параллельных переносов вдоль одного направления и симметрий относительно перпендикулярных этому направлению прямых

Если в группе  $G$  нет других элементов, то оба случая (14.9) и (14.10) реализуются бордюрами из рис. 14.9.

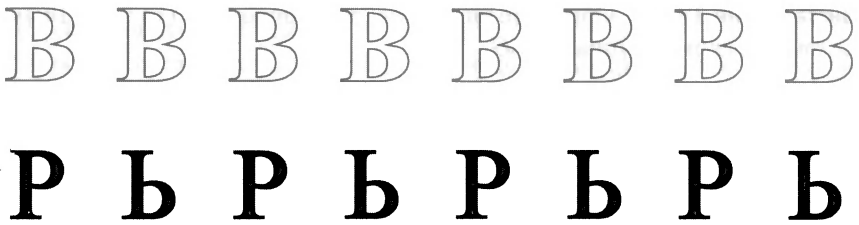


Рис. 14.9: Группа  $G$  состоит из параллельных переносов и скользящих симметрий, оба случая из леммы 14.28

Далее, если в группе  $G$  есть преобразования двух типов из центральной симметрии, отражения относительно вертикальной прямой и скользящей симметрии в горизонтальном направлении, то их композиция будет преобразованием третьего типа (проверьте).

Поэтому, не ограничивая общности, исследуем случай, когда в группе  $G$  есть центральная симметрия и скользящая симметрия в горизонтальном направлении. К такой группе  $G$  применимы леммы 14.24 и 14.28. Покажем, что центры симметрии лежат на прямой  $y = 0$ . Пусть в группе  $G$  имеются два преобразования: скользящая симметрия  $\tilde{L}: (x, y) \mapsto (x + c, -y)$  и центральная симметрия  $S: (x, y) \mapsto (2a - x, 2b - y)$  относительно точки  $(a, b)$ . Тогда их композиция  $L \circ S$  является скользящей симметрией относительно вертикальной прямой со

сдвигом на  $-2b$  по вертикали. В самом деле,

$$L \circ S(x, y) = L(2a - x, 2b - y) = (2a + c - x, y - 2b).$$

По лемме 14.25 этот сдвиг должен быть нулевым, поэтому точка  $(a, b)$  лежит на прямой  $y = 0$ , относительно которой делаются скользящие симметрии в горизонтальном направлении.

(6) Случай, когда в группе  $G$  имеются центральные симметрии и скользящие симметрии вида (14.9), реализуется бордюром из рис. 14.10.



Рис. 14.10: Группа  $G$  содержит центральные симметрии и скользящие симметрии вида (14.9)

(7) Случай, когда в группе  $G$  имеются центральные симметрии и скользящие симметрии вида 14.10, реализуется бордюром из рис. 14.11.



Рис. 14.11: Группа  $G$  содержит центральные симметрии и скользящие симметрии вида (14.10)

## 14.6 Немного алгебры

Пусть  $G$  — группа движений аффинной плоскости. Выберем на плоскости декартову систему координат и свяжем с  $G$  две группы. С первой из них мы уже встречались — это подгруппа  $\Gamma$ , состоящая из всевозможных параллельных переносов в  $G$  (включая тождественное преобразование).

Каждое движение в группе  $G$  в зафиксированном нами аффинном базисе записывается в виде  $x \mapsto Ax + b$ , где  $A$  — некоторая ортогональная матрица, а  $b$  — вектор. Обозначим через  $dG$  множество всех таких матриц  $A$ , а отображение, которое ставит в соответствие движению  $g \in G$  матрицу  $A$ , обозначим через  $\gamma$ .

**Лемма 14.30.** (1) Подмножество  $dG \subset O(2)$  является подгруппой в  $O(2)$ .

(2) отображение  $\gamma$  — гомоморфизм  $G \rightarrow dG$  с ядром  $\Gamma$ ; в частности,  $\Gamma$  — нормальная подгруппа в  $G$ .

(3) Гомоморфизм  $\gamma$  задает изоморфизм  $G/\Gamma \cong dG$ .

*Доказательство.* Если  $A_1, A_2 \in dG$ , то, по определению, в группе  $G$  существуют движения  $g_1$  и  $g_2$ , для которых  $g_1(x) = A_1 x + a_1$  и  $g_2(x) = A_2 x + a_2$  для некоторых подходящих векторов  $a_1$  и  $a_2$ . Рассмотрим композицию  $g_1 \circ g_2$ . Она лежит в  $G$  и, как легко проверить, действует по формуле  $g_1 \circ g_2(x) = g_1(A_2 x + a_2) = A_1 A_2 x + A_1 a_2 + a_1$ , следовательно,  $A_1 A_2 \in dG$ .

Из этого же рассуждения следует, что  $\gamma(g_1 g_2) = A_1 A_2 = \gamma(g_1)\gamma(g_2)$ , т.е.  $\gamma$  — гомоморфизм.

Ядром  $\gamma$  служат такие движения  $x \mapsto Ax + a$ , у которых матрица  $A$  — единичная. Этими движениями в точности являются параллельные переносы, из которых состоит подгруппа  $\Gamma \subset G$ .

Наконец, изоморфизм  $G/\Gamma \cong dG$  следует из эпиморфности гомоморфизма  $\gamma$  (это простое следствие определения элементов группы  $dG$ ) и теоремы о гомоморфизме.  $\square$

**Замечание 14.31.** Эта лемма показывает, что группу  $dG$  можно определить инвариантно, независимо от выбора базиса, как  $G/\Gamma$ .

**Лемма 14.32.** Пусть в группе  $G$  имеется перенос на вектор  $b$ , и пусть  $A \in dG$ . Тогда перенос на вектор  $Ab$  тоже лежит в группе  $G$ .

**Замечание 14.33.** Эта лемма, в частности, означает, что под действием элементов группы  $dG$  множество параллельных переносов в группе  $G$  переходит в себя.

*Доказательство.* Поскольку  $A \in dG$ , то в группе  $G$  имеется движение  $g$ , которое задается формулой  $g(x) = Ax + a$ . Обратное преобразование, очевидно, задается формулой  $g^{-1}(x) = A^{-1}(x - a)$ . Пусть  $T_b$  — перенос на вектор  $b$ , а именно,  $T_b(x) = x + b$ .

В группе  $G$  имеется преобразование  $g \circ T_b \circ g^{-1}$ . Легко видеть, что

$$\begin{aligned} g \circ T_b \circ g^{-1}(x) &= g \circ T_b(A^{-1}(x - a)) = g(A^{-1}(x - a) + b) = \\ &= A(A^{-1}(x - a) + b) + a = x + Ab, \end{aligned}$$

тем самым  $g \circ T_b \circ g^{-1}$  является переносом на вектор  $Ab$ .  $\square$

## 14.7 Кристаллографические группы для плоскости

Далее в этой главе мы опишем все возможные типы симметрий двумерных кристаллов. Прежде всего, уясним математическую постановку задачи. Нас интересуют все возможные типы плоских кристаллов с точки зрения их симметрии. Здесь под симметрией кристалла понимается любое движение евклидовой плоскости, которое сохраняет структуру кристалла. Ясно, что композиция двух симметрий заданного кристалла, а также движение, обратное к заданной симметрии — снова симметрии того же кристалла; тем самым все симметрии кристаллического вещества образуют подгруппу, содержащуюся в группе движений плоскости. Все точки кристалла, переходящие друг в друга при преобразованиях из этой группы, абсолютно равноправны (в частности, равноправны атомы одного и того же типа); это приводит к следующему определению.

**Определение 14.34.** Пусть  $G$  — подгруппа в группе движений евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Две точки  $A, B \in \mathbb{R}^2$  называются *эквивалентными относительно группы  $G$* , если существует движение  $g \in G$ , для которого  $B = g(A)$ .

Математическое определение кристаллографической группы формализует следующие свойства кристаллов.

(1) Кристалл *однороден и периодичен*, т.е. существует конечный кусок, симметричным повторением которого получается все вещество.

(2) Кристалл *дискретен*, т.е. у любой точки есть окрестность, в которой нет точек, эквивалентных данной (кроме нее самой).

Математическая формализация этих свойств выглядит следующим образом.

**Определение 14.35.** Пусть  $G$  — группа движений евклидовой плоскости. Множество  $D \subset \mathbb{R}^2$  называется *фундаментальной областью группы  $G$* , если для всякой точки  $y \in \mathbb{R}^2$  найдется эквивалентная ей точка  $x \in D$ .

**Определение 14.36.** Напомним, что группа движений  $G$  называется *дискретной*, если для любой точки  $A$  на плоскости существует круг с центром в точке  $A$ , в котором нет других точек, эквивалентных  $A$ .

**Определение 14.37.** *Плоской кристаллографической* (или *федоровской*) *группой* называется дискретная группа движений евклидовой плоскости, для которой существует ограниченная фундаментальная область.

**Замечание 14.38.** Нетрудно проверить, что, если фундаментальная область группы  $G$  ограничена, то существует такое число  $R$ , для которого круг радиуса  $R$  — фундаментальная область (докажите!).

Таким образом, проблема описания возможных типов симметрий кристаллов сводится к следующей математической задаче.

**Задача 14.39.** Найти все плоские кристаллографические группы.

Ниже приводится решение этой задачи; в частности, явно предъ-являются все возможные типы орнаментов на плоскости.

## 14.8 Параллельные переносы в кристаллографической группе

Центральная идея классификации кристаллов состоит в разбиении исходной задачи на 3 этапа: сперва изучаются входящие в группу  $G$  параллельные переносы, затем описываются связанные с  $G$  ортогональные преобразования, т.е. матрицы  $A$ , входящие в  $dG$ , см. (14.7), и, наконец, исследуется “взаимодействие” этих двух типов симметрии. Начнем с рассмотрения параллельных переносов; пусть  $G$  — кристаллографическая группа, и пусть  $\Gamma$  — множество параллельных переносов, содержащихся в  $G$ . Как было показано выше,  $\Gamma$  — нормальная подгруппа в  $G$ . Мы покажем, что индекс  $\Gamma$  в кристаллографической группе конечен; заодно дадим новое независимое доказательство того, что  $\Gamma$  нормальна в  $G$ .

**Теорема 14.40.** *Группа  $\Gamma$  — нормальная подгруппа в  $G$  конечного индекса (т.е. фактор-группа  $H = G/\Gamma$  конечна).*

*Доказательство.* Пусть  $\gamma \in \Gamma$  — сдвиг на вектор  $b$ , и движение  $g \in G$  записано в виде (14.7). Движение  $g\gamma g^{-1}$  переводит точку  $x$  в точку

$$g\gamma g^{-1}(x) = A(A^{-1}(x - a) + b) + a = x + Ab,$$

т.е. представляет собой сдвиг на вектор  $Ab$ . Поэтому  $\Gamma$  — нормальная подгруппа.

Фактор-группа  $H = G/\Gamma$  состоит из ортогональных матриц  $A$ , входящих в (14.7); каждая такая матрица задает поворот вокруг фиксированной точки (начала координат) или отражение относительно оси, проходящей через эту точку. Убедимся, что среди нетождественных поворотов есть поворот на минимальный угол. Поскольку композиция

поворота и сдвига — снова поворот, достаточно доказать, что в группе  $G$  не может быть поворотов на сколь угодно малые углы.

Пусть это не так, т.е. для всякого положительного  $\varepsilon$  в  $G$  найдется поворот на положительный угол  $\alpha < \varepsilon$ . Фиксируем точку  $B$ ; в силу дискретности группы, существует круг радиуса  $r$  с центром в точке  $B$ , в котором нет точек, эквивалентных  $B$ .

С другой стороны, фундаментальная область группы содержится в круге некоторого радиуса  $R$ ; взяв для каждого натурального  $k$  положительное число  $\varepsilon_k < \frac{r}{kR}$ , выберем точку  $A_k$ , вокруг которой существует поворот на угол, не превосходящий  $\varepsilon_k$ ; на расстоянии, не большем  $R$ , от точки  $B$  найдется точка  $\hat{A}_k$ , эквивалентная  $A_k$ . Вокруг этой точки также существует поворот на угол, меньший  $\varepsilon_k$ ; если  $\hat{A}_k \neq B$  для некоторого  $k$ , то при повороте вокруг точки  $\hat{A}_k$  точка  $B$  перейдет в точку  $B_1$ , отстоящую от  $B$  на расстояние, меньшее, чем  $2R \sin(\varepsilon_k/2) < R\varepsilon_k < r/k$ , что противоречит дискретности группы  $G$ . Если же  $\hat{A}_k = B$  для всех  $k$ , то вокруг одной точки  $B$  существуют повороты на сколь угодно малые углы, что также противоречит дискретности  $G$  (для любой точки  $C \neq B$  существуют сколь угодно близкие к ней точки, полученные поворотами  $C$  вокруг  $B$ ).

Итак, множество всех положительных углов поворотов в группе  $H$  отделено от нуля положительной константой; точная нижняя грань  $\alpha_0$  этого множества — минимальный положительный угол поворотов из  $H$ . Действительно, если в  $H$  нет поворота на угол  $\alpha_0$ , то существует последовательность  $\alpha_k \rightarrow \alpha_0$ , где  $\alpha_k > \alpha_0$  — углы поворотов из  $H$ ; в этом случае последовательность углов  $\alpha_k - \alpha_{k-1}$  (повороты на такие также присутствуют в  $H$ ) содержит сколь угодно малые числа. Ясно, что все повороты на углы  $k\alpha_0$ , где  $k$  — целое число, входят в  $H$ . Других поворотов в этой группе нет, поскольку, если  $k\alpha_0 < \beta < (k+1)\alpha_0$ , то положительный угол  $\beta - k\alpha_0$  меньше  $\alpha_0$ ; в частности, отсюда следует, что  $\alpha_0 = 2\pi/n$ .

Таким образом, подгруппа поворотов, входящих в  $H$ , — это конечная циклическая группа, состоящая из поворотов на углы  $2\pi k/n$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ , где  $n$  — порядок группы поворотов. Отсюда, в свою очередь, вытекает конечность числа возможных осей отражений: композиция двух отражений — поворот на угол, равный удвоенному углу между осями отражений, следовательно, возможных углов между осями конечное число.  $\square$

**Замечание 14.41.** Попутно мы доказали, что все повороты, содержащиеся в группе  $H$ , — это повороты на углы  $2\pi k/n$  для некоторого фиксированного  $n$ .



Из конечности фактор-группы вытекает следующее ключевое свойство группы  $\Gamma$ .

**Теорема 14.42.** *Для каждой кристаллографической группы  $G$  группа  $\Gamma$  тоже кристаллографическая.*

*Доказательство.* Нетривиально лишь наличие у  $\Gamma$  ограниченной фундаментальной области. Пусть  $G = \bigcup_{k=1}^N g_k \Gamma$ , и пусть  $D$  — фундаментальная область  $G$ . Положим  $\tilde{D} = \bigcup_{k=1}^N g_k^{-1}(D)$  и проверим, что  $\tilde{D}$  — фундаментальная область  $\Gamma$ . Действительно, для любой точки  $A$  существует движение  $g$ , для которого  $g(A) \in D$ ; представим  $g$  в виде  $g = g_k \gamma$ , где  $\gamma \in \Gamma$ ; тогда  $\gamma(A) = g_k^{-1} g(A) \in \tilde{D}$ .  $\square$

Из доказанной теоремы вытекает полное описание возможных групп сдвигов.

**Теорема 14.43.** *Группа  $\Gamma$  состоит из сдвигов на векторы  $ta + nb$ , где  $a, b$  — два не параллельных вектора,  $m, n$  — целые числа. В частности, любая такая группа изоморфна  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .*

*Доказательство.* Из дискретности группы  $\Gamma$  следует, что в  $\Gamma$  найдется сдвиг на кратчайший (ненулевой) вектор (докажите!). Обозначим этот вектор через  $a$ , и рассмотрим прямую  $l$  в  $\mathbb{R}^2$  с направляющим вектором  $a$ .

Среди векторов, лежащих на этой прямой, сдвигам из  $\Gamma$  соответствуют векторы вида  $ta$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ , и только они. Действительно, если в  $\Gamma$  содержится вектор  $c = \lambda a$ ,  $\lambda > 0$  и  $m < \lambda < m + 1$ , то принадлежащий  $\Gamma$  вектор  $c - ma$  короче, чем  $a$ .

Далее, сдвигами на векторы вида  $ta$  группа  $\Gamma$  исчерпывается не может; действительно, если других сдвигов нет, то в открытой полосе, перпендикулярной прямой  $l$  и ограниченной прямыми, проходящими через точки  $0, a$ , нет эквивалентных точек, а значит, группа сдвигов на векторы  $ta$  не обладает ограниченной фундаментальной областью.

Рассмотрим векторы сдвигов из  $\Gamma$ , не лежащие на  $l$ ; среди них есть ближайший к этой прямой. Действительно, пусть  $c \in \Gamma$ ,  $c \notin l$ ; спроецируем  $c$  ортогонально на  $l$ . Проекция попадет в отрезок  $\lambda a$ ,  $m \leq \lambda < m + 1$ . Рассмотрим полосу  $Q$ , перпендикулярную  $l$  и ограниченную прямыми, проходящими через  $ma$  и  $(m + 1)a$ ; в этой полосе лежит вектор  $c$ , и существует вектор  $b$ , ближайший к прямой  $l$  и не лежащий на ней (докажите!). Расстояние от любого вектора  $e \in \Gamma$ ,  $e \notin l$ , до прямой  $l$  не меньше, чем расстояние от  $b$  до  $l$ ; действительно, любой вектор сдвигом на вектор вида  $ka$  можно загнать в полосу  $Q$ , а при таком сдвиге расстояние до  $l$  не меняется.

Ясно, что сдвиги на все векторы вида  $ma + nb$  принадлежат группе  $\Gamma$ ; докажем, что других сдвигов в  $\Gamma$  нет. Для этого разобьем плоскость на параллелограммы  $T_{mn} : x = ta + \tau b$ ,  $m \leq t \leq m+1$ ,  $n \leq \tau \leq n+1$ . Если вектор  $x \in T_{mn}$ ,  $x \neq m_1 a + n_1 b$ ,  $m_1, n_1 \in \mathbb{Z}$ , то вектор  $x - ma - nb$  либо короче, чем  $a$ , либо ближе к  $l$ , чем  $b$  (проверьте!); следовательно, такой вектор не может принадлежать  $\Gamma$ .  $\square$

## 14.9 Повороты и отражения. 10 кристаллографических классов

Теперь, пользуясь конечностью группы  $H$  (т.е. фактор-группы  $G/\Gamma$ ), мы опишем эту конечную группу или, что то же, соответствующую подгруппу  $dG \subset \text{SO}(2)$  (напомним, что группы  $H$  и  $dG$  изоморфны — далее мы не будем их различать).

**Определение 14.44.** *Кристаллографическим классом группы  $G$  называется конечная группа  $H = G/\Gamma$ .*

Напомним, что в каждой кристаллографической группе содержатся сдвиги на векторы  $ma + nb$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

**Определение 14.45.** Множество  $L = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = ma + nb\}$  называется *решеткой*.

**Замечание 14.46.** Ясно, что решетка — подгруппа в  $\mathbb{R}^2$ , изоморфная  $\Gamma$ .

Как уже отмечалось, если  $g(x) = Ax + a$  — движение из группы  $G$ , т.е.  $A \in dG$ , а  $\gamma$  — сдвиг на вектор  $c$  из решетки  $L$ , то вектор  $Ac$  тоже лежит в решетке  $L$ , поскольку в группе  $G$  есть сдвиг на такой вектор (напомним, он может быть получен как  $g\gamma g^{-1}$ ). Отсюда следует, что решетка инвариантна относительно группы  $H$ ; таким образом, описание всевозможных групп  $H$  сводится к перечислению конечных подгрупп ортогональной группы, сохраняющих некоторую решетку.

Оказывается, все такие группы легко найти. Обозначим через  $C_n$  подгруппу поворотов на углы  $2\pi k/n$  (очевидно,  $C_n$  — циклическая группа порядка  $n$ ), а через  $D_n$  — группу симметрий правильного  $n$ -угольника. Порядок последней группы равен  $2n$ ; она содержит повороты на углы  $2\pi k/n$ , а также отражения относительно  $n$  осей (для четного  $n$  это прямые, соединяющие противоположные вершины и середины противоположных сторон  $n$ -угольника, а для нечетного — прямые, соединяющие вершину с серединой противоположной стороны);

группа  $D_1$  состоит из одного отражения и тождественного преобразования, а  $D_2$  — из двух отражений относительно перпендикулярных осей, тождественного преобразования и центральной симметрии).

**Теорема 14.47.** *Фактор-группа  $dG = G/\Gamma$  изоморфна одной из 10 групп  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_6, D_1, D_2, D_3, D_4, D_6$ . Тем самым существует не более 10 различных кристаллографических классов.*

*Доказательство.* Рассмотрим сперва повороты, входящие в  $H$ . Поскольку группа конечна, углы всех таких поворотов кратны  $2\pi/n$  для некоторого натурального  $n$ . Как и ранее, обозначим через  $a$  кратчайший ненулевой вектор решетки  $L$ ; повернув его на угол  $2\pi/n$ , получим вектор  $a_1 \in L$  той же длины  $|a|$ . Разность  $a_1 - a$  — снова вектор решетки; его длина не может быть меньше  $|a|$ , поэтому угол между векторами  $a_1$  и  $a$  не может быть меньше, чем  $\pi/3 = 2\pi/6$ . Таким образом,  $n \leq 6$ ; если  $n = 5$ , то решетка инвариантна относительно поворотов на угол  $4\pi/5$ , а поскольку, кроме того, любая решетка инвариантна относительно поворота на угол  $\pi$  (центральной симметрии), то  $L$  сохраняется и при повороте на угол  $\pi - 4\pi/5 = 2\pi/10$ , что, как мы только что видели, невозможно.

Итак, группа  $H$  в качестве подгруппы поворотов содержит одну из групп  $C_n$ ,  $n = 1, 2, 3, 4, 6$ . Если эта подгруппа совпадает с  $H$ , мы получаем одну из первых пяти возможностей. Если в  $H$  есть отражение относительно оси  $l$  и поворот на угол  $\alpha$ , то есть и отражение относительно оси, повернутой на угол  $\alpha/2$ ; с другой стороны, композиция отражений относительно двух осей — поворот на угол, равный удвоенному углу между осями, поэтому углы между осями отражений всегда кратны половинам углов поворотов (и принимают все такие значения). Таким образом, если  $H$  содержит отражение, то это — одна из групп  $D_n$ ,  $n = 1, 2, 3, 4, 6$ .  $\square$

На рис. 14.12 изображены решетки, инвариантные относительно перечисленных групп. Решетка, образованная параллелограммами общего вида, инвариантна относительно групп  $C_1, C_2$ , прямоугольная и ромбическая решетки — относительно групп  $C_1, C_2, D_1, D_2$ , квадратная — относительно  $C_1, C_2, C_4, D_1, D_2, D_4$ , и ромбическая с углом  $60^\circ$  — относительно групп  $C_1, C_2, C_3, C_6, D_1, D_2, D_3, D_6$ . Последняя решетка называется *гексагональной*, или *шестиугольной*, поскольку она образует правильные шестиугольники.

**Задача 14.48.** Докажите, что, если решетка инвариантна относительно группы  $D_1$ , то она обязательно прямоугольная или ромбическая; если она инвариантна относительно  $C_4$ , то она — квадратная; если же она

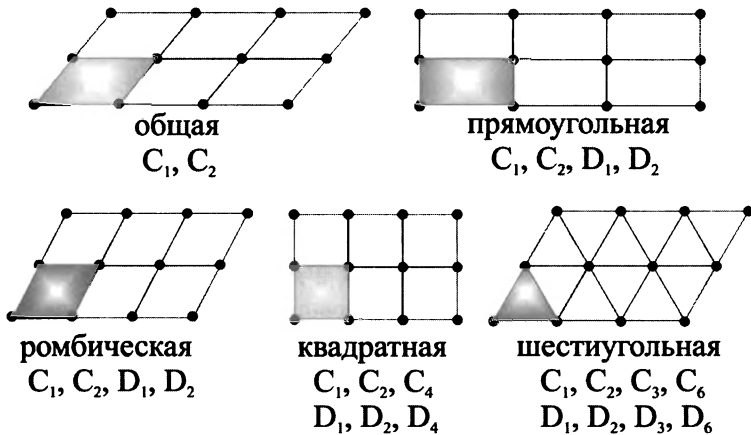


Рис. 14.12: Решетки

инвариантна относительно  $C_3$ , то — гексагональная. Таким образом, на рис. 14.12 изображены все различные типы решеток, инвариантных относительно кристаллографических классов.

**Замечание 14.49.** Кристаллографический класс  $H$  сам по себе не является кристаллографической группой (напомним, что группа  $\Gamma$  обязательно содержит сдвиги, в то время как в  $H$  их нет). Более того, кристаллографическая группа, вообще говоря, не обязана содержать подгруппу, изоморфную конечной группе  $H$ ; ниже мы выясним, в каких группах такая подгруппа имеется.

## 14.10 Симметрии решеток. 13 арифметических классов

Задание подгруппы  $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  параллельных переносов и факторгруппы  $H$  (кристаллографического класса) не определяет самой группы  $G$ ; это связано с двумя обстоятельствами. Во-первых, как отмечалось в предыдущем пункте, группа  $H$  оставляет на месте решетку  $L$  (т.е. содержится в ее группе симметрий); другими словами,  $H$  действует на  $L$ , переставляя векторы решетки. Ясно, что разные действия (т.е. такие, которые не сводятся одно к другому заменой базиса решетки) будут соответствовать разным кристаллографическим группам. Во-вторых, сдвиги из  $\Gamma$  и преобразования из  $H$  могут по-разному

“взаимодействовать”, порождая преобразования из  $G$ ; другими словами, структура смежных классов  $G$  по  $\Gamma$  может быть различной.

В этом пункте мы изучим первый из этих двух вопросов, т.е. опишем всевозможные типы симметрий решеток; другими словами, наша ближайшая задача — классификация пар  $(H, L)$ , где  $L$  — решетка на плоскости, инвариантная относительно кристаллографического класса  $H$ . Здесь надо пояснить, какие пары считаются одинаковыми. В базисе  $a, b$  вектор решетки задается парой целых чисел, а преобразование из группы  $H$  — целочисленной  $2 \times 2$ -матрицей. Ясно, что выбор базисных векторов  $a, b$ , вообще говоря, не однозначен: переход к другому базису описывается целочисленной матрицей с определителем  $\pm 1$  (подчеркнем, что базисные векторы всегда принадлежат нашей решетке, причем все векторы решетки для любого базиса  $\tilde{a}, \tilde{b}$  имеют вид  $m\tilde{a} + n\tilde{b}$ ). Тем самым группы симметрий решеток  $H$  мы можем понимать как группы целочисленных  $2 \times 2$ -матриц, причем две такие группы считаются одинаковыми, если они переходят друг в друга при целочисленном преобразовании координат, т.е. при преобразовании вида  $A \rightarrow T^{-1}AT$ , где  $T$  — целочисленная матрица с определителем  $\pm 1$ .

**Определение 14.50.** Пара  $(H, L)$  (рассматриваемая с точностью до указанной эквивалентности) называется *арифметическим классом кристаллографической группы*  $G$ .

**Теорема 14.51.** Для каждого кристаллографического класса, кроме  $D_1, D_2, D_3$ , существует ровно один арифметический класс; для каждой из групп  $D_1, D_2, D_3$  существует по два таких класса. На рис. 14.13 отмечены оси отражений для групп  $D_2$  и  $D_3$ , соответствующие двум разным действиям такой группы на решетке.

*Доказательство.* Пусть сперва  $H = C_n$ . Если  $n = 1$ , группа состоит только из тождественного преобразования (т.е. единственная целочисленная матрица в группе — единичная). Если  $n = 2$ , каждый базисный вектор при тождественном преобразовании переходит в себя, а при повороте на  $\pi$  — в противоположный вектор; другими словами, группа состоит из двух матриц  $\pm E$ . При  $n > 2$  стандартный базис решетки, изображенной на рис.1, состоит из векторов равной длины, угол между которыми равен  $2\pi/n$ ; при таком выборе базиса группа состоит из степеней матриц

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если  $H = D_4$ , решетка обязательно квадратная (т.е. образована двумя ортогональными векторами равной длины), а если  $H = D_6$  — решет-

ка образована двумя равными векторами, расположенными под углом  $\pi/3$  (докажите!); при этом оси отражений в обоих случаях направлены вдоль этих векторов и вдоль биссектрис образованных ими углов. Таким образом, арифметический класс в каждом из этих случаев определен однозначно.

**Задача 14.52.** Выписать целочисленные матрицы, входящие в группу  $D_4$  или  $D_6$ , в стандартном базисе решетки.

Пусть  $H = D_1$ , т.е. группа состоит из тождественного преобразования и одного отражения. Соответствующая решетка либо прямоугольная, либо ромбическая. В первом случае базис решетки можно выбрать так, чтобы при отражении первый базисный вектор не менялся, а второй менял знак; в таком базисе группа состоит из степеней матрицы

$$B_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Во втором случае выберем базис так, чтобы первый базисный вектор при отражении переходил во второй, а второй — в первый; тогда группа состоит из степеней матрицы

$$B_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что соответствующие арифметические классы различны: в первом случае в решетке существует базис из собственных векторов отражения, а во втором — нет.

Аналогичный эффект наблюдается для групп  $D_2$  и  $D_3$ : либо в решетке существует базис, векторы которого лежат на осях отражений, либо такого базиса не существует. Разберем подробно случай  $D_3$ ; соответствующая решетка гексагональна. Выберем стандартный базис этой решетки: он состоит из двух кратчайших векторов, повернутых друг относительно друга на угол  $\pi/3$ . Для трех осей отражения имеется две возможности: либо две из них совпадают с осями базисных векторов, а третья повернута относительно базисных осей на  $60^\circ$ ; либо одна из осей — биссектриса ромба, построенного на базисных векторах, а остальные получаются из нее поворотами на  $60^\circ$ . Таким образом, имеется ровно два арифметических класса, соответствующих  $D_3$ .

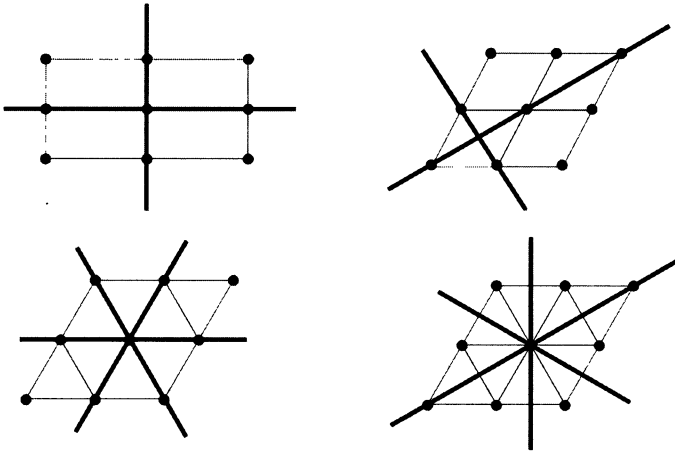


Рис. 14.13: Оси отражений, соответствующие разным арифметическим классам для групп  $D_2$  и  $D_3$

На рис. 14.13 выделены оси отражений, соответствующие разным арифметическим классам для групп  $D_2$  и  $D_3$ .  $\square$

**Замечание 14.53.** С алгебраической точки зрения, классификация кристаллографических классов  $H$  — это классификация конечных подгрупп ортогональной группы, сохраняющих некоторую решетку, с точностью до изоморфизма (можно доказать, что тот же результат дает классификация с точностью до сопряжения в ортогональной группе); классификация арифметических классов — это классификация тех же групп с точностью до сопряжения в группе  $GL(2, \mathbb{Z})$  целочисленных матриц с определителем  $\pm 1$ .

## 14.11 Решетки Браве, типы Браве и сингонии

На рис. 14.12 изображены 5 типов решеток на евклидовой плоскости, обладающих нетривиальными симметриями (т.е. группа симметрий которых отлична от единичной); первый тип образован параллелограммами общего вида, второй — прямоугольниками, третий — ромбами, четвертый — квадратами и пятый — ромбами, склеенными из двух правильных треугольников. Для каждой решетки имеется максимальная группа, допускаемая данной решеткой ( $C_2$  для первой решетки,

$D_2$  для второй и третьей,  $D_4$  для четвертой и  $D_6$  для пятой); таким образом имеется 4 возможных максимальных подгруппы.

**Определение 14.54.** Решетки, обладающие нетривиальной симметрией, называются *решетками Браве*, а соответствующие максимальные группы — *группами Браве*, или *сингониями* (французский физик и кристаллограф Огюст Браве в 1848 году перечислил аналогичные решетки и максимальные группы их симметрий в трехмерном пространстве).

Каждой кристаллографической группе (точнее, каждому арифметическому классу) соответствует пара (решетка Браве, группа Браве); эта пара называется *типом Браве* или *арифметической голоэдрией* кристаллографической группы. Конечная группа  $H$  (кристаллографический класс) содержится в соответствующей группе Браве. Таким образом, имеется 4 группы и 5 типов Браве.

**Замечание 14.55.** Существует альтернативная интерпретация групп Браве: вместо того, чтобы фиксировать евклидову структуру на плоскости и изучать разные решетки, можно фиксировать решетку и изучать различные евклидовы структуры (т.е. положительно определенные квадратичные формы от двух переменных — координат вектора в базе данной решетки). Группа  $GL(2, \mathbb{Z})$  целочисленных  $2 \times 2$ -матриц с определителем  $\pm 1$  действует на множестве таких форм целочисленными заменами координат; подгруппы, сохраняющие данную квадратичную форму (стабилизаторы этого действия), и есть группы Браве. Такая интерпретация удобна для вычисления аналогичных групп в многомерных пространствах.

**Замечание 14.56.** В группе  $GL(2, \mathbb{Z})$  имеется две максимальные подгруппы (т.е. такие подгруппы, которые не содержатся ни в какой большей конечной подгруппе) — это группы  $D_4$  и  $D_6$ . Обе они являются группами Браве (максимальными группами симметрий соответствующих решеток). Обратное, очевидно, неверно — не всякая подгруппа Браве максимальна в  $GL(2, \mathbb{Z})$ .

## 14.12 Классификация федоровских групп

В этом пункте мы закончим классификацию кристаллографических групп. Для этого рассмотрим каждый арифметический класс  $(H, L)$  и выясним, какие группы  $G$  могут ему соответствовать. Поскольку в каждой такой группе имеется нормальная подгруппа  $\Gamma$ , причем факторгруппа  $G/\Gamma$  изоморфна  $H$ , вопрос сводится к конструкции классов



смежности, соответствующих элементам из  $H$ . Самый простой способ построить группу  $G$  — рассмотреть решетку  $L$  и взять в качестве  $G$  группу, порожденную движениями из  $H$ , сохраняющими  $L$ , и сдвигами на векторы из  $L$  (другими словами,  $G$  состоит из всех композиций указанных движений). Построенная группа, очевидно, содержит  $H$  и  $\Gamma$  в качестве подгрупп. Таким способом мы получим 13 кристаллографических групп; однако возможна и более тонкая конструкция.

Продemonстрируем это обстоятельство на примере арифметического класса  $D_1^{(1)}$ , определяемого прямоугольной решеткой, построенной на векторах  $a = \overrightarrow{OA}$ ,  $b = \overrightarrow{OB}$ , и группой  $D_1$  ее симметрий (эта группа состоит из тождественного преобразования и отражения от вертикальной оси). Приведенная выше простейшая конструкция определяет группу симметрий орнамента, изображенного на рис. 14.14.

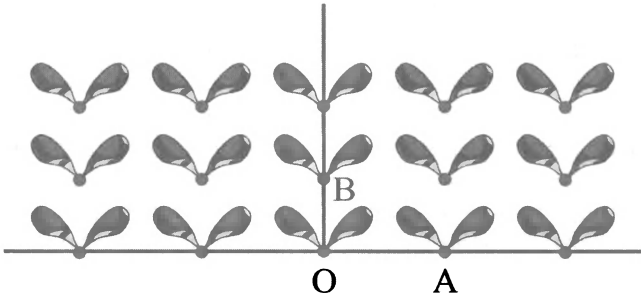


Рис. 14.14: Орнамент с симморфной группой симметрий

С другой стороны, рассмотрим группу, порожденную сдвигом на вектор  $a$  и скользящей симметрией с осью, параллельной вектору  $b$ , и вектором сдвига  $b/2$ . Поскольку двукратное применение такой симметрии приводит к сдвигу на вектор  $b$ , решетки  $L$ , соответствующие двум построенным группам, одинаковы (они порождены векторами  $a$  и  $b$ ). Группа  $H$  тоже одна и та же — это группа  $D_1$  (полная группа симметрий нашей решетки, очевидно, совпадает с  $D_2$ , но в построенных группах нет движений, получающихся композицией сдвига и отражения относительно горизонтальной оси). Новая группа — группа симметрий орнамента, изображенного на рис. 14.15; очевидно, две построенные группы не изоморфны — в первой группе содержатся отражения, а во второй — нет (в частности, нет элементов порядка 2).

Алгебраическая причина появления разных групп, соответствующих одному и тому же арифметическому классу, состоит в следующем.

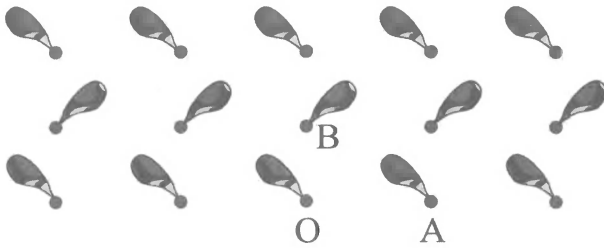


Рис. 14.15: Орнамент с несимморфной группой симметрий

Как уже отмечалось, порождая кристаллографическую группу ортогональными преобразованиями из  $H$  и сдвигами на векторы решетки, мы получим группы, содержащие “в чистом виде” движения из  $H$ .

**Определение 14.57.** Кристаллографическая группа называется *симморфной* (или *расщепляемой*), если она содержит все преобразования из своего кристаллографического класса  $H$  (при подходящем выборе начала координат).

Итак, классификация плоских кристаллографических групп выглядит следующим образом.

**Теорема 14.58.** *Существует всего 17 различных (т.е. попарно не изоморфных) кристаллографических групп. Каждому из арифметических классов, кроме трех, указанных ниже, соответствует ровно одна симморфная кристаллографическая группа. Не расщепляться могут только группы, соответствующие арифметическим классам  $(D_m, L)$ , где  $L$  — прямоугольная решетка, а  $m = 1, 2, 4$ ; при этом для  $m = 1$  и  $m = 4$  существует по одной не симморфной группе, а для  $m = 2$  — две.*

*Доказательство.* То, что любая группа арифметического класса вида  $(C_m, L)$  симморфна — очевидно: композиция поворота и сдвига — поворот на тот же угол, поэтому каждая такая группа содержит все повороты из  $H$  (если в качестве начала координат взять любой центр поворота на угол  $2\pi/m$ ).

Докажем симморфность групп, соответствующих арифметическим классам  $(D_m, L)$ ,  $m = 1, 2, 3, 6$ , причем для  $m = 1, 2$  решетка  $L$  не прямоугольна. Разберем сперва простейший случай  $(D_1, L)$  с ромбической решеткой.

Пусть  $a_1, a_2$  — стандартный базис ромбической решетки; будем считать, что ось отражения  $s$  (диагональ ромба) горизонтальна. Рассмотрим движение из группы  $G$  изучаемого арифметического класса, представляющее собой композицию отражения  $s$  и сдвига на вектор  $b$ ; в координатах это движение имеет вид  $y = g(x) = Sx + b$ , где  $x, y \in \mathbb{R}^2$ ,  $S$  — матрица отражения  $s$ . Поскольку  $s^2$  — тождественное отображение, получаем, что

$$g^2(x) = S(Sx + b) + b = x + Sb + b$$

— сдвиг на вектор  $Sb + b$ ; следовательно, этот вектор принадлежит решетке  $L$ . Убедимся, что выбором начала координат можно сделать вектор  $b$  параллельным  $a_1$ . Действительно, после переноса начала координат на вектор  $c$  координатная запись  $g$  будет выглядеть следующим образом:

$$y + c = S(x + c) + b,$$

или

$$y = Sx + b + Sc - c.$$

Таким образом, сдвиг начала координат приводит к замене вектора  $b$  на вектор  $b + Sc - c$ ; другими словами, к этому вектору прибавляется удвоенная проекция вектора  $c$  на вертикальную ось (т.е. ось, перпендикулярную оси отражения  $s$ ). Поскольку вектор  $a_1$  не перпендикулярен оси симметрии  $s$ , добавляя к вектору  $b$  вектор, перпендикулярный  $s$ , можно сделать этот вектор параллельным  $a_1$ .

Итак, можно считать, что  $b = \lambda a_1$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Поскольку вектор  $Sb + b$  равен удвоенной проекции вектора  $b$  на ось отражения  $s$ , из условия принадлежности  $L$  вектора  $\lambda(Sa_1 + a_1)$  вытекает, что  $\lambda$  — целое число. Это означает, что, при подходящем выборе начала координат, вектор  $b$  принадлежит решетке, т.е. отражение  $s$  содержится в группе  $G$ , поэтому  $G$  — симморфна.

Аналогичные рассуждения применимы и в остальных случаях; рассмотрим, например, арифметический класс  $(D_6, L)$ . Заметим, что группа  $D_6$  (как и любая из групп  $D_k$  при  $k > 1$ ) порождается двумя отражениями относительно осей, угол между которыми минимален (т.е., в данном случае, равен  $\pi/6$ ). Выберем в решетке стандартный базис  $a_1, a_2$  (состоящий из двух кратчайших векторов, угол между которыми  $\pi/3$ ), и пусть ось отражения  $s_2$  проходит через вектор  $a_1$ , а ось  $s_1$  — через диагональ ромба, построенного на векторах  $a_1, a_2$ . В группе  $G$  имеются движения  $g_k$  вида  $y = g_k(x) = S_k x + b_k$ ,  $k = 1, 2$ , причем, как и ранее, векторы  $S_k b_k + b_k$  принадлежат решетке.

Совершенно аналогично предыдущему случаю проверяется, что выбором начала координат оба вектора  $b_1, b_2$  можно сделать параллельными базисным векторам  $a_1, a_2$  (при сдвиге начала координат на вектор  $c$  к вектору  $b_k$  прибавляется вектор произвольной длины, перпендикулярный оси  $s_k$ ). В этом случае условие принадлежности решетке векторов  $Sb_k + b_k$  влечет принадлежность решетке самого вектора  $b_k$ .

Осталось описать группы, соответствующие классам  $(D_m, L)$ , где  $m = 1, 2, 4$  и решетка  $L$  — прямоугольная. Мы уже видели, что при  $m = 1$  существует по крайней мере две различные группы. Докажем, что их ровно две. Для этого рассмотрим отражение  $s$  — единственное нетривиальное преобразование в  $D_1$ ; базис  $a_1, a_2$  прямоугольной решетки выберем так, чтобы вектор  $a_1$  был направлен вдоль, а вектор  $a_2$  — перпендикулярно оси  $s$ . Пусть  $g$  — движение, записываемое в виде  $g(x) = Sx + b$ .

Повторяя приведенное выше рассуждение, выберем начало координат так, чтобы выполнялось  $b = \lambda a_1$ , причем, поскольку  $Sb + b = 2\lambda a_1$  принадлежит решетке,  $2\lambda$  — целое число. Если  $\lambda$  целое, отражение  $s$  содержится в группе  $G$  и мы получаем симморфную группу, порожденную  $s$  и сдвигами на векторы из  $L$ . Если  $\lambda$  полуцелое, в группе  $G$  содержится скользящая симметрия с осью, направленной вдоль вектора  $a_1$  решетки и сдвигом на вектор  $a_1/2$ ; один из смежных классов по подгруппе  $\Gamma$  состоит из композиций этого движения со сдвигами, а второй — из одних сдвигов. Таким образом, группа  $G$  порождена сдвигами и указанной скользящей симметрией.

Рассмотрим арифметический класс  $D_2$  с прямоугольной решеткой. Пусть  $a_1, a_2$  — перпендикулярные базисные векторы, направленные вдоль осей отражений. Для описания смежных классов группы  $G$  по подгруппе  $\Gamma$  снова рассмотрим движения вида  $g_k(s) = S_k x + b_k$ , где  $S_k$  — матрицы отражений. Аналогично предыдущему, убеждаемся, что выбором начала координат можно добиться равенств  $b_k = \lambda_k a_k$ , причем  $2\lambda_k \in \mathbb{Z}$ . Теперь имеется три возможности.

1. Оба числа  $\lambda_k$  — целые; в этом случае группа  $G$  содержит отражения  $s_1, s_2$ , а значит, и все преобразования из  $D_2$ , т.е. порождается  $\Gamma$  и  $D_2$  (симморфная группа).

2. Одно из чисел  $\lambda_k$  целое, а второе — полуцелое. В этом случае смежный класс  $G$  по  $\Gamma$ , соответствующий одному отражению, содержит это отражение, а класс, соответствующий второму, его не содержит. Первый порожден отражением и сдвигами, второй — сдвигами и скользящей симметрией относительно оси отражения со сдвигом на вектор, равный половине вектора решетки. Эти смежные классы порождают всю группу  $G$  (так как отражения  $s_1, s_2$  порождают  $D_2$ ).

3. Оба числа  $\lambda$  — полуцелые. Группа  $G$  порождена сдвигами и двумя скользящими симметриями относительно осей отражений со сдвигами на половины векторов решетки.

Наконец, рассмотрим класс  $(D_4, L)$ , где  $L$  — квадратная решетка; обозначим через  $a_1, a_2$  перпендикулярные друг другу базисные векторы решетки. Группа  $D_4$  порождена двумя отражениями относительно осей, угол между которыми равен  $\pi/4$ ; пусть первая ось направлена вдоль  $a_1$ , а вторая — вдоль  $a_1 + a_2$ . Обозначим через  $s_1, s_2$  отражения относительно этих осей и рассмотрим их смежные классы, т.е. движения вида  $g_k(x) = S_k x + b_k$ , причем, как и ранее, выбором начала координат можно добиться равенств  $b_k = \lambda_k a_k$ . Из равенства  $S_k^2 = E$  вытекают, как и ранее, соотношения  $\lambda_k(S_k a_k + a_k) \in L$ ; с учетом расположения векторов  $a_k$  и осей отражений  $s_k$  они означают, что  $2\lambda_1 a_1 \in L, \lambda_2(a_1 + a_2) \in L$ , откуда  $2\lambda_1 \in \mathbb{Z}, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ . Если число  $\lambda_1$  целое, оба класса смежности содержат отражения  $s_k$  и группа  $G$  симморфна; если же  $\lambda_1$  полуцелое, группа  $G$  порождена сдвигами, отражением относительно оси  $a_1 + a_2$  и скользящей симметрией относительно оси отражения  $a_1$  со сдвигом на вектор  $a_1/2$ .  $\square$

На рис. 14.16 изображены 17 орнаментов, соответствующих всем федоровским группам.

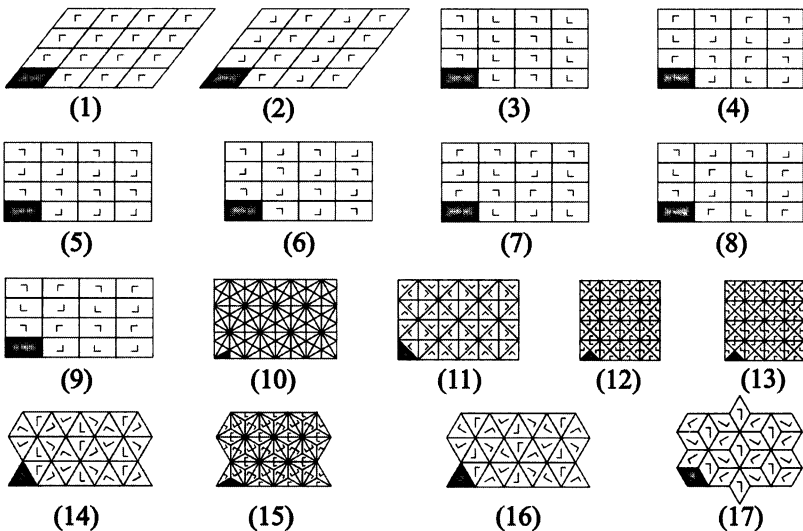


Рис. 14.16: Орнаменты, соответствующие федоровским группам

## 14.13 Когомологии кристаллографических классов

Обсудим последний этап классификации кристаллографических групп (теорему предыдущего пункта) с более инвариантной точки зрения. Доказательство этой теоремы состояло в описании возможной структуры смежных классов группы  $G$  по подгруппе параллельных переносов (при этом достаточно рассматривать не все классы, а те, которые порождают группу). Каждый смежный класс состоит из движений вида  $g(x) = sx + a$ , где  $s$  — фиксированное ортогональное преобразование из конечной группы  $H$ , а к вектору  $a$  можно прибавлять произвольный вектор решетки  $L$ . Тем самым этот вектор однозначно определен как элемент фактор-группы  $T = \mathbb{R}^2/L$  двумерной плоскости по решетке  $L$ , и мы фактически изучали отображение  $q: H \rightarrow T$ ,  $q(s) = a$ . Композиции преобразований  $s_2s_1$  соответствует вектор  $s_2(a_1) + a_2$ , т.е.

$$(14.11) \quad q(s_2s_1) = s_2(a_1) + a_2.$$

**Определение 14.59.** Отображение  $q: H \rightarrow T$ , удовлетворяющее свойству (14.11), называется *1-коциклом группы  $H$  со значениями в  $T$* .

В нашем распоряжении был выбор начала координат на плоскости; при сдвиге его на вектор  $c$  вектор  $a$  переходит в вектор  $\tilde{a} = a + s(c) - c$ .

**Определение 14.60.** 1-коциклы  $q$  и  $\tilde{q}$  называются *когомологичными*, если существует такой вектор  $c \in T$ , что для всех  $s \in H$  имеем  $\tilde{q}(s) = q(s) + s(c) - c$ ; 1-коцикл  $q$  называется *кограницей*, если он когомологичен нулевому, т.е. найдется такой вектор  $c$ , что  $q(s) = c - s(c)$  при всех  $s \in H$ .

Таким образом, на последнем этапе классификации мы изучали коциклы на  $H$ , не различая при этом когомологичные (т.е. с точностью до прибавления кограниц). Заметим, что коциклы образуют абелеву группу (относительно сложения векторов  $q(s)$ ); очевидно, кограницы образуют в ней подгруппу. Симморфные кристаллографические группы, очевидно, соответствуют кограницам (при подходящем выборе начала координат параллельный перенос оказывается принадлежащем решетке, т.е. существует движение  $s \in H$ ).

**Определение 14.61.** Фактор-группа  $H^1(H, T)$  1-коциклов по кограницам (т.е. по отношению когомологичности) называется *группой одномерных когомологий группы  $H$  со значениями в  $T$* .

Доказательство теоремы из предыдущего пункта состояло в вычислении этой группы для пар  $(H, L)$ , образующих арифметические классы. В частности, мы доказали, что для всех пар, кроме трех, эта группа тривиальна, поэтому им соответствуют только симморфные группы. Для оставшихся трех пар группа когомологий оказывается равной  $\mathbb{Z}_2$  (для пар  $(D_1, L)$  и  $(D_4, L)$ ) или  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$  (для пары  $(D_2, L)$ ): элементы этой группы (классы когомологий) полностью определяются тем, целые или полужелые значения принимают числа  $\lambda$ , для которых  $2\lambda \in \mathbb{Z}$ . Это обстоятельство приводит к наличию двух кристаллографических групп, соответствующих каждой из пар  $(D_1, L)$ ,  $(D_4, L)$  и трех, соответствующих паре  $(D_2, L)$  (конечно, в группе  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$  четыре элемента, но векторы  $a_k$ , образующие решетку, определены с точностью до перестановки, которая соответствует перестановке двух классов когомологий; эти классы тем самым определяют одинаковые кристаллографические группы).

## 14.14 Алгебраический аспект кристаллографии. Классификация в других размерностях

Повторим еще раз основные этапы приведенной классификации кристаллографических групп.

1. Доказательство существования в каждой кристаллографической группе нормальной подгруппы параллельных переносов, порожденной двумя непараллельными векторами, и конечности фактор-группы по ней.

2. Классификация фактор-групп (кристаллографических классов), т.е. дискретных подгрупп ортогональной группы, сохраняющих некоторую решетку.

3. Классификация пар  $(H, L)$ , состоящих из решетки и дискретной подгруппы ортогональной группы, ее сохраняющей (арифметических классов).

4. Для каждой пары описание классов смежности по подгруппе  $H$ , порождающих группу  $G$ , т.е. классов когомологий  $\alpha \in H^1(H, T)$ .

Тем самым, с алгебраической точки зрения, классификация кристаллографических групп сводится к классификации троек  $(H, L, \alpha)$ , где  $H$  — конечная подгруппа ортогональной группы, сохраняющая решетку  $L$ ,  $\alpha \in H^1(H, T)$  — элемент группы когомологий группы  $H$  со значениями в  $T = \mathbb{R}^2/L$ . При этом классификация групп  $H$ , сохраня-

ющих некоторую решетку (т.е. кристаллографических классов) — это классификация соответствующих конечных подгрупп ортогональной группы с точностью до сопряжения в ней, а классификация пар  $(H, L)$  — это классификация тех же групп, но с точностью до сопряжения в  $GL(2, \mathbb{Z})$ .

Аналогичную задачу можно рассматривать для евклидова пространства произвольной размерности. К настоящему времени она полностью решена в размерностях 2, 3 и 4 (как уже отмечалось, в размерностях 2 и 3 классификация была получена в XIX веке Е.С.Федоровым; четырехмерные кристаллографические группы описаны в 1978 году (Brown H., Blow R., Neubšer J., Wondratschek H., Zassenhaus H. “Crystallographic groups of four-dimensional space”. Wiley, 1978).

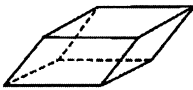
В трехмерном случае имеется 7 сингоний, соответствующих следующим параллелепипедам решеток Браве:

- *триклинная*, соответствующая параллелепипеду общего вида;
- *моноклинная*, соответствующая прямой призме с произвольным основанием;
- *орторомбическая*, соответствующая произвольному прямоугольному параллелепипеду;
- *тригональная*, соответствующая параллелепипеду, полученному из куба сжатием вдоль диагонали;
- *тетрагональная*, соответствующая прямой призме с квадратным основанием;
- *гексагональная*, соответствующая прямой призме, основание которой — ромб, склеенный из двух равносторонних треугольников;
- *кубическая*, соответствующая кубу.

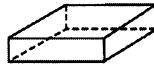
Число типов Браве в трехмерном случае равно 14, число кристаллографических классов — 32, арифметических классов — 73, общее число кристаллографических групп — 219.

**Замечание 14.62.** В кристаллографии принято различать 230 пространственных кристаллографических групп. Это связано с тем, что в кристаллографии различными считаются изоморфные группы движений пространства, если они переводятся друг в друга аффинным преобразованием, обращающим ориентацию.





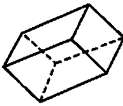
Триклинная  
(произвольный  
параллелепипед)



Моноклинная  
(прямая призма)



Орторомбическая  
(произвольный  
прямоугольный  
параллелепипед)



Тригональная  
(куб, сжатый вдоль  
пространственной  
диагонали)



Тетрагональная  
(прямая призма  
с квадратным  
основанием)



Гексагональная  
(прямая призма,  
основание которой  
составлено из двух  
равносторонних  
треугольников)



Кубическая  
(куб)

Рис. 14.17: Сингонии в трехмерном случае

В четырехмерном пространстве имеется 33 сингонии, 64 типа Браве, 227 кристаллографических классов, 710 арифметических классов и 4783 кристаллографические группы.

Кроме того, при  $n \leq 10$  найдены все максимальные конечные подгруппы группы  $GL(n, \mathbb{Z})$ ; в частности, для  $n = 3$  их 4, а для  $n = 4$  — их 9.

Для произвольной размерности задача состоит из тех же этапов. В основе лежат следующие теоремы, доказанные немецким математиком Людвигом Биберахом.

**Теорема 14.63.** *Всякая кристаллографическая группа в  $n$ -мерном евклидовом пространстве содержит нормальную подгруппу конечного индекса, состоящую из параллельных переносов.*

**Теорема 14.64.** *Две кристаллографические группы изоморфны тогда и только тогда, когда они переводятся друг в друга аффинным преобразованием  $n$ -мерного пространства.*

**Теорема 14.65.** *В каждой размерности существует лишь конечное число кристаллографических групп.*

Таким образом, в произвольной размерности (так же, как и для плоскости) задача состоит в восстановлении кристаллографической группы по подгруппе  $\Gamma$  параллельных переносов и конечной факторгруппе  $H$ . Соответствующая алгебраическая процедура называется расширением.

**Определение 14.66.** Группа  $G$  называется *расширением группы  $\Gamma$  при помощи группы  $H$* , если в  $G$  есть нормальная подгруппа, изоморфная  $\Gamma$ , факторгруппа по которой изоморфна  $H$ .

Из первой теоремы Бибераха вытекает, что каждая кристаллографическая группа является расширением абелевой группы параллельных переносов при помощи конечной группы ортогональных преобразований. Обратное утверждение также верно; соответствующая теорема была доказана Х.Цассенхаузом в 1948 году.

**Теорема 14.67.** *Для всякого расширения  $G$  группы  $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$  при помощи конечной группы, точно действующей на  $\Gamma$ , существует кристаллографическая группа, изоморфная  $G$ .*

Теоремы Бибераха и Цассенхауза показывают, что задачу о кристаллографических группах можно понимать как вопрос абстрактной алгебры.

## 14.15 Квазикристаллы

Центральное свойство кристаллов, лежащее в основе их классификации — периодичность: в каждом кристалле имеется фундаментальная область, идентичное повторение которой заполняет всю плоскость; в частности, кристалл переходит в себя при сдвигах на векторы решетки  $\Gamma$ . Аналогично обстоит дело с классификацией дискретных групп движений плоскости, содержащих одномерную подгруппу параллельных переносов. Однако, как в природе, так и в декоративном искусстве встречаются более сложные замощения плоскости и пространства; симметрии этих замощений могут отличаться от описанных выше кристаллографических групп.

В физике твердые тела с симметрией, запрещенной кристаллографической теорией, называют *квазикристаллами*; они были открыты Д.Шехтманом в 1982 году в экспериментах по дифракции электронов

на сплаве алюминия и марганца. Эксперименты показывали невозможную для кристаллов симметрию; в частности, дифракционная картина была инвариантна относительно поворотов на угол  $72^\circ$ . Структура расположения атомов в полученном им образце оказалась совершенно неожиданной: она не была кристаллической решеткой в обычном смысле, т.е. она не была инвариантна относительно переносов, но зато в ней была ось симметрии пятого порядка. Этот экспериментальный факт показался настолько невероятным, что статья Шехтмана дважды отклонялась от публикации и была в конце концов напечатана в сокращенном виде в соавторстве с несколькими привлеченными им специалистами (в 2011 году Шехтман получил за эту работу Нобелевскую премию).

В 2009 году учеными из Принстона было обнаружено, что кусок редкого минерала *хатыркита*, найденный в 1979 году на Корякском Нагорье Чукотки, представляет собой природный квазикристалл (минерал оказался у голландского коллекционера, вдова которого после смерти мужа продала образец в музей естествознания во Флоренции). В 2011 году петрографы сообщили, что образец внеземного происхождения — по-видимому, он старше Земли и появился 4,5 миллиарда лет назад при образовании Солнечной Системы. Летом 2011 года была организована экспедиция на Чукотку, в ходе которой удалось найти новые образцы минерала.

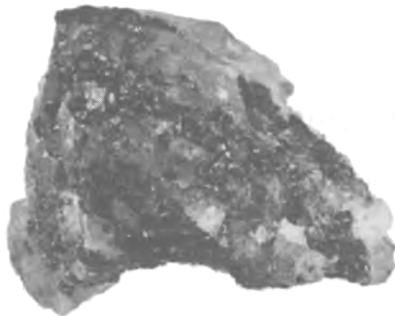


Рис. 14.18: Природный квазикристалл с Корякского Нагорья

В математике квазикристаллы были открыты в 1974 г. Р. Пенроузом: он обнаружил замощения плоскости (мозаики), обладающие аналогичной симметрией, см. рис. 14.19. У этого замощения есть одна ось симметрии пятого порядка. Кроме того, любой конечный фрагмент

повторяется в мозаике бесконечное число раз. Впоследствии оказалось, что такие мозаики использовались в исламской архитектуре по крайней мере с XIV века; в своей последней работе исследователь архитектуры из Техасского технологического университета Р.Аджлуни выделила три примера совершенных квазипериодических моделей в исламской архитектуре: это традиционный для сельджукской архитектуры круговой узор (например, на святылище имама Дарб-и и Пятничной мечети в Исфахане (Иран), образец второго узора представлен в оформлении внутренних стен двора медресе аль-Аттари, построенной в 1323 году в Фесе (Марокко), третий вариант узора изображен на башне гробницы Гунбад-и Кабуд в Мераге (Иран).

Простейшая математическая модель квазикристалла, найденная Пенроузом, представлена на рис. 14.19: она состоит из двух ромбов — узкого с углами  $36^\circ$ ,  $144^\circ$  и широкого с углами  $72^\circ$ ,  $108^\circ$ ; стороны всех ромбов равны, см. рис. 14.20. Замощение не периодическое, но каждый конечный кусок встречается в нем бесконечное множество раз. Кроме того, видна точка, повороты вокруг которой на углы, кратные  $72^\circ$ , переводят мозаику в себя, что невозможно для кристаллической симметрии.

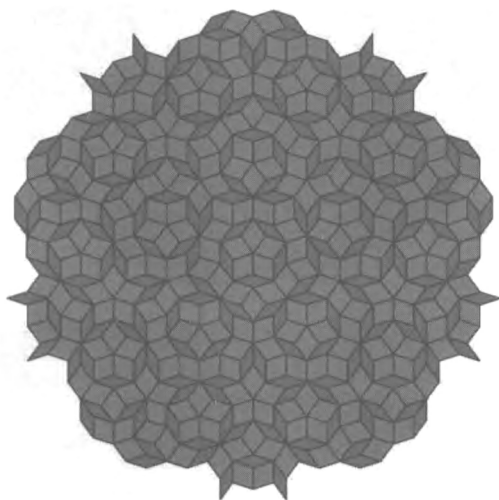


Рис. 14.19: Мозаика Пенроуза

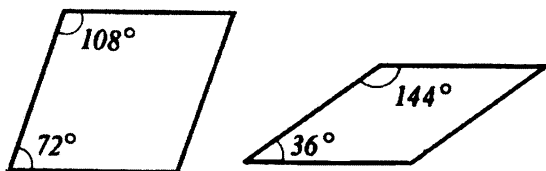


Рис. 14.20: Ромбы мозаики Пенроуза

Другой пример приведен на рис. 14.21: плоскость покрыта многоугольниками четырех типов (звезда, ромб, правильный пятиугольник и “бумажный кораблик”).

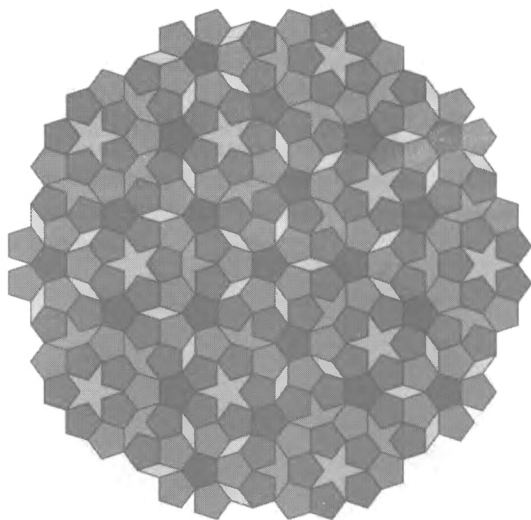


Рис. 14.21: Мозаика Пенроуза

Еще один популярный пример (тоже найденный Пенроузом), приведен на рис. 14.22.

На следующих двух рисунках приведены примеры квазикристаллических орнаментов в исламской архитектуре.

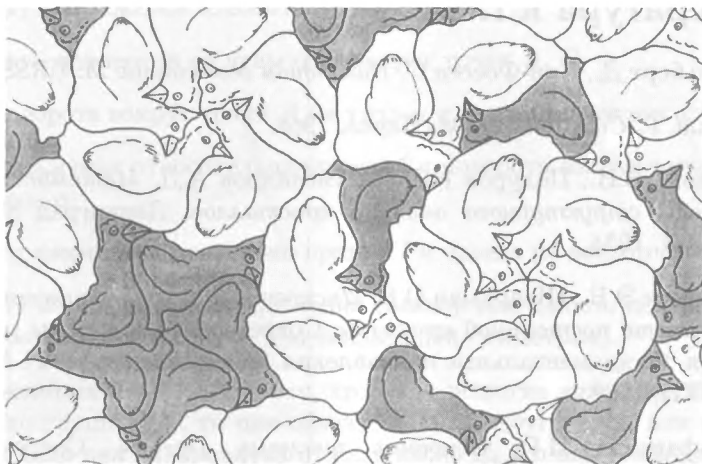


Рис. 14.22: Мозаика Пенроуза. Плоскость покрыта цыплями двух типов

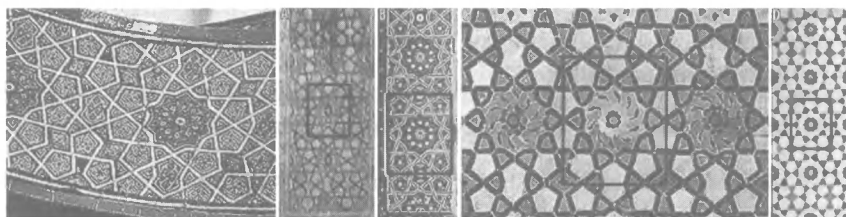


Рис. 14.23: Квазикристаллические орнаменты в исламской архитектуре

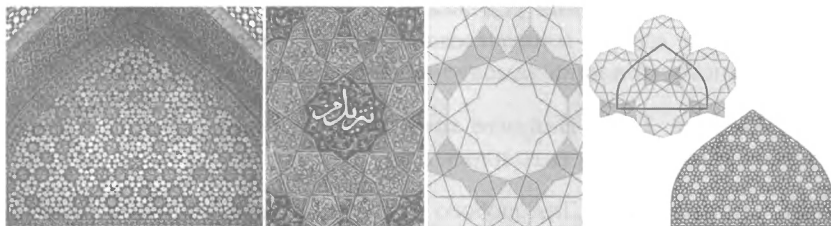


Рис. 14.24: Квазикристаллические орнаменты в исламской архитектуре

## Литература к главе 14

- [1] Гильберт Д., Кон-Фоссен С. *Наглядная геометрия*. М: URSS, 2016.
- [2] Вейль Г. *Симметрия*. М: Наука, 1968.
- [3] Делоне Б.Н., Падунов Н.Н., Александров А.Д. *Математические основы структурного анализа кристаллов*. Ленинград–Москва; ОНТИ, 1934.
- [4] Винберг Э.Б., Шварцман О.В. *Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны*. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 29 (Геометрия–2). М: ВИНТИ, 1988.
- [5] Шафаревич И.Р. *Основные понятия алгебры*. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 11 (Алгебра–1). М: ВИНТИ, 1986.

## Упражнения к главе 14

**Упражнение 14.1.** Докажите, что плоскость можно замостить многоугольниками, равными

- (1) любому наперед заданному выпуклому четырехугольнику;
- (2) любому наперед заданному невыпуклому четырехугольнику (та же идея, что и в предыдущем случае).

**Упражнение 14.2.** Теорема 14.5 утверждает, что замощение плоскости равными правильными  $n$ -угольниками существует только для  $n = 3, 4, 6$ . Останется ли верной эта теорема, если рассматривать замощения без выполнения условия (3) из определения 14.1 (т.е. позволить вершине одного многоугольника замощения лежать на стороне другого многоугольника замощения)?

**Упражнение 14.3.** Найдите хотя бы один пятиугольник, копиями которого можно замостить плоскость.

**Упражнение 14.4.** Для любого  $n \geq 7$  придумайте пример невыпуклого  $n$ -угольника, копиями которого можно замостить плоскость.

**Упражнение 14.5.** Выясните, какое из движений получается в результате композиции:

- двух отражений относительно прямых  $l_1, l_2$ ;
- двух поворотов на углы  $\alpha, \beta$  вокруг точек  $A, B$ ;
- поворота вокруг точки  $A$  на угол  $\alpha$  и сдвига на вектор  $a$ ;
- отражения относительно прямой  $l$  и поворота вокруг точки  $A$  на угол  $\alpha$ ;
- отражения относительно прямой  $l$  и сдвига на вектор  $a$ .

Найдите параметры этих движений (вектор для сдвига, центр и угол для поворота, ось и вектор для скользящей симметрии).

**Упражнение 14.6.** Докажите, что, если решетка инвариантна относительно группы  $D_1$ , то она обязательно прямоугольная или ромбическая; если она инвариантна относительно  $C_4$ , то она — квадратная; если же она инвариантна относительно  $C_3$ , то — гексагональная.

**Упражнение 14.7.** Выпишите целочисленные матрицы, входящие в группу  $D_4$  или  $D_6$ , в стандартном базисе решетки.

**Упражнение 14.8.** Найдите фундаментальные области для всех 17 федоровских групп.

**Упражнение 14.9.** Для каждого орнамента на рис. 14.16 изобразите соответствующую решетку и найти тип Браве.

**Упражнение 14.10.** Для каждого узора, изображенного на рис. 14.25, найдите его группу симметрий. Для каждой группы найдите фундаментальную область. Какие из этих групп дискретны?

**Упражнение 14.11.** Для каждого узора, изображенного на рис. 14.26 (бордюры), найдите его группу симметрий; вычислите фундаментальные области.



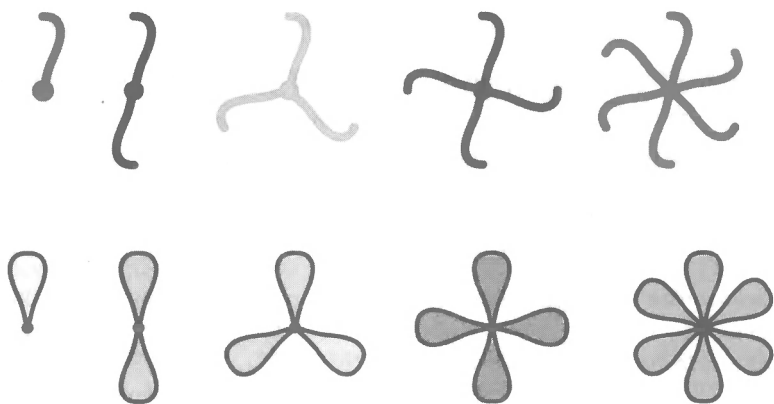


Рис. 14.25: Простейшие узоры

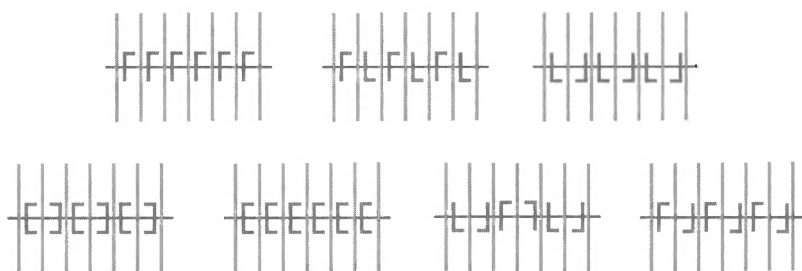


Рис. 14.26: Бордюры

# Глава 15

## Пространство Минковского

**План.** Псевдоевклидово скалярное произведение, пространство Минковского, события, пространственноподобные, времени подобные, изотропные или световые векторы, мировая линия, световой конус, подпространства и ортогональные дополнения в пространстве Минковского, эллиптические, гиперболические и параболические подпространства, преобразования Лоренца, гиперболические повороты, ортохронные и неортохронные, собственные и несобственные преобразования Лоренца, бусты, собственное время, инерциальные наблюдатели, относительность одновременности, сокращение длин, замедление времени, собственное время наблюдателя, инерциальный наблюдатель, неравенство Коши-Буняковского, парадокс близнецов.

### 15.1 Псевдоевклидово скалярное произведение

В специальной теории относительности центральную роль играет пространство Минковского — линейное пространство, скалярное произведение в котором не знакоопределено. Такое же пространство является объемлющим для геометрии Лобачевского — эта геометрия возникает на двумерной поверхности (псевдосфере) в трехмерном пространстве Минковского. В этой главе мы обсудим основные факты линейной алгебры пространства Минковского.

**Определение 15.1.** *Пространством Минковского  $M^{n+1}$  называется линейное пространство размерности  $n + 1$ , в котором задана квадратичная (симметричная билинейная) форма сигнатуры  $(n, 1)$  (последнее означает, что в некотором базисе форма приводится к каноническому виду, содержащему  $n$  квадратов координат со знаком плюс и один*

квадрат — со знаком минус). Эта форма называется *псевдоевклидовым скалярным произведением*.

Мы будем обозначать псевдоевклидово скалярное произведение (так же, как и обычное) угловыми скобками. По определению, в пространстве  $M^{n+1}$  существует базис  $e_0, e_1, \dots, e_n$ , в котором скалярное произведение векторов  $\xi, \eta$  имеет вид  $\langle \xi, \eta \rangle = -\xi^0\eta^0 + \xi^1\eta^1 + \dots + \xi^n\eta^n$ . Такой базис (как и в евклидовом случае) будем называть *ортонормированным*; координаты в нем будем обозначать через  $x^0, x^1, \dots, x^n$ .

**Замечание 15.2.** В специальной теории относительности координаты  $x = (x^1, \dots, x^n)$  — пространственные, а координата  $x^0$  — временная (точнее,  $x^0 = ct$ , где  $c$  — скорость света). Точки пространства Минковского называются *событиями*.

**Замечание 15.3.** Иногда (в основном в физической литературе) скалярному произведению в пространстве Минковского приписывают противоположный знак, т.е. полагают  $\langle \xi, \eta \rangle = \xi^0\eta^0 - \xi^1\eta^1 - \dots - \xi^n\eta^n$ . Ясно, что все формулы векторной алгебры и дифференциальной геометрии при этих двух разных определениях пространства Минковского просто пересчитываются друг через друга (в нужных местах надо поменять знаки).

Различия между евклидовой и псевдоевклидовой геометрией немедленно проявляются при рассмотрении длин векторов. Действительно, в евклидовой геометрии квадрат длины любого ненулевого вектора — положительное число. В геометрии Минковского это не так: у некоторых векторов скалярный квадрат положителен, у некоторых — отрицателен, у некоторых — нулевой.

**Определение 15.4.** Векторы  $\xi \in M^{n+1}$ , для которых  $\langle \xi, \xi \rangle > 0$ , называются *пространственноподобными*; векторы, для которых  $\langle \xi, \xi \rangle < 0$ , — *временноподобными*, и векторы, для которых  $\langle \xi, \xi \rangle = 0$ , — *изотропными* или *светоподобными*.

**Пример 15.5.** Векторы  $e_1, \dots, e_n$  из определенного выше базиса (и любые их линейные комбинации) пространственноподобны, вектор  $e_0$  временноподобен, а векторы  $e_0 + e_i, i = 1, \dots, n$ , — изотропные.

**Пример 15.6.** Рассмотрим движение в евклидовом пространстве релятивистской частицы (т.е. частицы, подчиняющейся законам теории относительности). Закон движения определяется зависимостью координат  $x^1, \dots, x^n$  от времени, т.е. функциями  $x^i = x^i(t), i = 1, \dots, n$ . Вспоминая, что  $x^0 = ct$ , получим параметрические уравнения кривой

в пространстве Минковского, определяемой законом движения частицы; эта кривая называется ее *мировой линией*. Рассмотрим вектор скорости  $\xi$  мировой линии; он имеет вид  $(c, v^1, \dots, v^n)$ , где  $v^i = dx^i/dt$  — координаты вектора скорости частицы. Скалярный квадрат вектора  $\xi$  равен  $\langle \xi, \xi \rangle = v^2 - c^2$ , где  $v^2 = (dx^1/dt)^2 + \dots + (dx^n/dt)^2$  — квадрат скорости частицы. Один из центральных постулатов теории относительности утверждает, что частицы с положительной массой движутся медленнее света; поэтому  $v^2 < c^2$  и, значит,  $\langle \xi, \xi \rangle < 0$ , так что *вектор скорости мировой линии любой массивной частицы всегда времени-подобен*. Если же частица движется со скоростью света (т.е.  $|v| = c$ , так могут двигаться только частицы нулевой массы — например, фотоны), вектор скорости ее мировой линии, очевидно, изотропен.

**Замечание 15.7.** Если вектор пространства Минковского времени-подобен (пространственноподобен, изотропен), то тем же свойством обладает и любой пропорциональный ему вектор. Поэтому прямые (одномерные подпространства) в  $M^{n+1}$  также делятся на три типа: пространственноподобные, времениподобные и изотропные.

Множество изотропных векторов задается в координатах уравнением  $x_0^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ ; эта поверхность представляет собой  $n$ -мерный конус в  $(n+1)$ -мерном пространстве, называемый *световым конусом*. Световой конус делит множество всех времениподобных векторов на два открытых множества, задаваемых неравенствами  $x_0^2 < x_1^2 + \dots + x_n^2$  и  $x_0^2 > x_1^2 + \dots + x_n^2$ . При этом, скалярное произведение любых двух векторов, лежащих в одном и том же множестве, отрицательно, а скалярное произведение векторов, лежащих в разных множествах, — положительно.

**Определение 15.8.** Два времениподобных вектора  $\xi, \eta$  называются *одинаково ориентированными во времени*, если  $\langle \xi, \eta \rangle < 0$ , и *по-разному ориентированными во времени*, если  $\langle \xi, \eta \rangle > 0$ .

**Пример 15.9.** Пусть  $e_0, \dots, e_n$  — ортонормированный базис в  $M^{n+1}$ . Времениподобный вектор  $\xi$  ориентирован во времени одинаково с вектором  $e_0$ , если и только если  $\xi^0 > 0$ .

## 15.2 Подпространства и ортогональные дополнения

В евклидовом пространстве у любого линейного подпространства  $L$  есть ортогональное дополнение  $L^\perp$  — пространство векторов, ортого-

нальных  $L$ . Это новое линейное пространство пересекается с  $L$  лишь по нулевому вектору, и сумма размерностей исходного пространства и его ортогонального дополнения равна размерности всего пространства. Вследствие этого, евклидово пространство разлагается в прямую сумму  $L \oplus L^\perp$ .

Выясним, как обстоит дело в пространстве Минковского. Пусть  $L$  — линейное подпространство в  $M^{n+1}$  размерности  $k+1$  ( $k=0, \dots, n$ ). Ортогональное дополнение к  $L$  определяется совершенно аналогично евклидовому случаю.

**Определение 15.10.** *Ортогональным дополнением  $L^\perp$  к линейному подпространству  $L \subset M^{n+1}$  называется множество векторов  $\xi \in M^{n+1}$ , для которых  $\langle \xi, \eta \rangle = 0$  при всех  $\eta \in L$ .*

**Задача 15.11.** Докажите, что  $L^\perp$  — линейное подпространство пространства Минковского,  $\dim L^\perp = (n-k)$  и  $(L^\perp)^\perp = L$ .

**Замечание 15.12.** Доказательство полностью аналогично евклидовому случаю и следует из невырожденности билинейной формы  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  в  $M^{n+1}$ .

Рассмотрим теперь вопрос о взаимном расположении подпространства и его ортогонального дополнения. Вообще говоря, эти два подпространства могут иметь ненулевое пересечение; действительно, если  $L$  — изотропная прямая, то  $L^\perp$ , очевидно, содержит  $L$ . В общем случае взаимное расположение  $L$  и  $L^\perp$  зависит от знака (сигнатуры) ограничения на подпространство псевдоевклидова скалярного произведения. А именно, скалярное произведение, рассматриваемое только на векторах из  $L$ , задает на этом подпространстве симметричную билинейную форму  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_L$ , называемую *ограничением скалярного произведения на подпространство  $L$*  (таким образом, по определению,  $\langle \xi, \eta \rangle_L = \langle \xi, \eta \rangle$  для любых  $\xi, \eta \in L$ ). Отметим, что эта билинейная форма, вообще говоря, может быть вырожденной (пример — изотропная прямая; ограничение на нее скалярного произведения — нулевая форма).

**Предложение 15.13.** *Пусть ограничение скалярного произведения на  $L$  невырождено, т.е. если  $\xi \in L$  и  $\langle \xi, \eta \rangle = 0$  при всех  $\eta \in L$ , то  $\xi = 0$ . Тогда  $L \cap L^\perp = \{0\}$  (такие подпространства называются *транссверсальными*) и ограничение скалярного произведения на  $L^\perp$  также невырождено.*

*Доказательство.* Пусть  $\xi \in L \cap L^\perp$  — ненулевой вектор. Тогда, поскольку  $\xi \in L^\perp$ , то  $\langle \xi, \eta \rangle = 0$  для всех  $\eta \in L$ , что означает вырожденность формы  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_L$ . Итак, если ограничение скалярного произведения

на  $L$  невырождено, то это подпространство пересекается со своим ортогональным дополнением только по нулевому вектору. Отсюда, в свою очередь, следует невырожденность формы  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^\perp}$ . Действительно, если для некоторого вектора  $\xi \in L^\perp$  и любого вектора  $\eta \in L^\perp$  выполняется  $\langle \xi, \eta \rangle = 0$ , то  $\xi \in L$ , так что  $\xi \in L^\perp \cap L = \{0\}$ , поэтому  $\xi = 0$ .  $\square$

**Следствие 15.14.** Если  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_L$  невырождено, то  $M^{n+1} = L \oplus L^\perp$ .

Рассмотрим линейное подпространство  $L$ , ограничение на которое скалярного произведения невырождено, и приведем билинейную форму  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_L$  к главным осям. На ортогональном дополнении приведем к главным осям невырожденную билинейную форму  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{L^\perp}$ . В результате получим базис главных осей (т.е. ортогональный базис) для скалярного произведения во всем пространстве Минковского. Поскольку во всем  $M^{n+1}$  сигнатура формы  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  имеет вид  $(n, 1)$ , то на одном из двух пространств  $L, L^\perp$  скалярное произведение положительно определено, а на другом имеет сигнатуру  $(q, 1)$  (здесь  $q = k$ , если это последнее пространство есть  $L$  и  $q = n - k - 1$ , если это  $L^\perp$ ).

**Определение 15.15.** Линейное подпространство  $L$  размерности  $k + 1$  пространства Минковского называется *эллиптическим* (или *евклидовым*), если ограничение скалярного произведения на  $L$  положительно определено, и *гиперболическим* (или *подпространством Минковского*), если это ограничение — форма сигнатуры  $(q, 1)$ .

**Замечание 15.16.** Выше было доказано, что, если форма  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_L$  невырождена, то  $L$  — либо евклидово подпространство (тогда  $L^\perp$  — подпространство Минковского), либо подпространство Минковского (тогда  $L^\perp$  — евклидово).

Предположим теперь, что ограничение скалярного произведения на подпространство  $L$  вырождено, т.е. существуют такие ненулевые векторы  $\xi \in L$ , для которых  $\langle \xi, \eta \rangle = 0$  при всех  $\eta \in L$ . Ясно, что множество таких векторов  $\xi$  образует линейное подпространство в  $L$ ; оно называется *ядром формы*  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_L$ . Очевидно, ядро состоит из изотропных векторов.

**Предложение 15.17.** Пусть  $L \subset M^{n+1}$  — произвольное подпространство, ограничение на которое формы  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  имеет ненулевое ядро. Тогда размерность этого ядра равна 1, и любой вектор, не принадлежащий ядру, — пространственноподобен.

*Доказательство.* Пусть  $e_0, e_1, \dots, e_n$  — некоторый ортонормированный базис. Для каждого вектора  $\xi \in M^{n+1}$  обозначим через  $(\xi^0, \dots, \xi^n)$

его координаты в этом базисе, а через  $\tilde{\xi}$  — вектор с координатами  $(0, \xi^1, \dots, \xi^n)$ . Ясно, что ограничение билинейной формы  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  на линейное подпространство всех векторов  $\tilde{\xi}$  является стандартным евклидовым скалярным произведением.

Пусть  $\xi \neq 0$  — вектор из ядра, а  $\eta \neq 0$  — произвольный вектор из  $L$ . Тогда  $\langle \xi, \xi \rangle = \langle \xi, \eta \rangle = 0$ , откуда

$$(15.1) \quad (\xi^0)^2 = \langle \tilde{\xi}, \tilde{\xi} \rangle \neq 0, \quad \langle \xi, \eta \rangle = -\xi^0 \eta^0 + \langle \tilde{\xi}, \tilde{\eta} \rangle = 0, \quad \langle \tilde{\eta}, \tilde{\eta} \rangle \neq 0,$$

где неравенства вытекают из того, что векторы  $\xi$  и  $\eta$  — ненулевые. Используя полученные формулы, выводим

$$(\eta^0)^2 = \frac{\langle \tilde{\xi}, \tilde{\eta} \rangle^2}{(\xi^0)^2} = \frac{\langle \tilde{\xi}, \tilde{\eta} \rangle^2}{\langle \tilde{\xi}, \tilde{\xi} \rangle \langle \tilde{\eta}, \tilde{\eta} \rangle} \langle \tilde{\eta}, \tilde{\eta} \rangle = \langle \tilde{\eta}, \tilde{\eta} \rangle \cos^2 \alpha,$$

где  $\alpha$  — евклидов угол между  $\tilde{\xi}$  и  $\tilde{\eta}$ . Следовательно,

$$(15.2) \quad \langle \eta, \eta \rangle = -(\eta^0)^2 + \langle \tilde{\eta}, \tilde{\eta} \rangle = \langle \tilde{\eta}, \tilde{\eta} \rangle \sin^2 \alpha.$$

Покажем теперь, что ядро одномерно. Предположим, что вектор  $\eta$  лежит в ядре. Тогда  $\langle \eta, \eta \rangle = 0$ , так что  $\sin^2 \alpha = 0$ , поэтому векторы  $\tilde{\xi}$  и  $\tilde{\eta}$  коллинеарны и, значит, существует  $\lambda \in \mathbb{R}$ , для которого  $\tilde{\xi} = \lambda \tilde{\eta}$ . Подставляя это соотношение в формулы (15.1), заключаем, что

$$\xi^0 \eta^0 = \langle \tilde{\xi}, \tilde{\eta} \rangle = \lambda \langle \tilde{\xi}, \tilde{\xi} \rangle = \lambda (\xi^0)^2,$$

поэтому  $\eta^0 = \lambda \xi^0$  и, значит,  $\eta = \lambda \xi$ . Последнее означает, что любой вектор из ядра коллинеарен  $\xi$ , так что ядро одномерно.

Покажем теперь, что каждый вектор  $\eta$ , не лежащий в ядре, пространственноподобен. Но для такого вектора  $\sin \alpha \neq 0$ , так что остается применить формулу (15.2).  $\square$

**Определение 15.18.** Линейное подпространство  $L \subset M^{n+1}$  называется *параболическим*, если форма  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_L$  вырождена.

**Замечание 15.19.** Рассмотрим ортогональное дополнение  $L^\perp$  к параболическому подпространству  $L$ . Ясно, что ядро ограничения на  $L$  скалярного произведения лежит в  $L^\perp$ ; таким образом, параболическое подпространство имеет общую прямую со своим ортогональным дополнением. Далее, из того, что  $(L^\perp)^\perp = L$  получаем, что эта общая прямая является ядром ограничения скалярного произведения на  $L^\perp$  (так как она принадлежит ортогональному дополнению к этому пространству). Таким образом, в пространстве Минковского возможно два

разных варианта взаимного расположения линейного подпространства и его ортогонального дополнения. Именно, либо одно из этих двух пространств эллиптическое, а другое гиперболическое — тогда они пересекаются только по нулевому вектору и в сумме дают все пространство  $M^{n+1}$ ; либо оба пространства параболические — тогда они пересекаются по одномерному ядру ограничения скалярного произведения на любое из этих пространств (и оба касаются по этому ядру светового конуса). Отметим, что пересекаться с внутренностью светового конуса (т.е. содержать времениподобные векторы) могут только гиперболические подпространства.

### 15.3 Преобразования Лоренца

И в теории относительности, и в геометрии Лобачевского важную роль играют линейные преобразования пространства Минковского, являющиеся аналогами ортогональных преобразований. Они называются преобразованиями Лоренца.

**Определение 15.20.** Линейный оператор  $A$  в пространстве Минковского  $M^{n+1}$  называется *преобразованием Лоренца*, если он сохраняет (псевдоевклидово) скалярное произведение, т.е. для любых двух векторов  $\xi, \eta \in M^{n+1}$  справедливо равенство  $\langle A\xi, A\eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle$ .

**Замечание 15.21.** Ясно, что, аналогично евклидовому случаю, преобразования Лоренца переводят ортонормированный базис пространства Минковского в ортонормированный базис и любые два ортонормированных базиса можно совместить единственным преобразованием Лоренца.

Матрицы  $A$  ортогональных операторов в ортонормированном базисе евклидова пространства удовлетворяют соотношению  ${}^t A A = E$  (единичная матрица). Выясним, как устроены матрицы преобразований Лоренца.

**Предложение 15.22.** Пусть  $A$  — матрица преобразования Лоренца в ортонормированном базисе пространства Минковского. Тогда  ${}^t A I A = I$ , где  $I$  — матрица скалярного произведения в этом базисе (очевидно, это диагональная  $(n+1) \times (n+1)$ -матрица, причем первый диагональный элемент равен  $-1$ , а остальные равны  $+1$ ).

*Доказательство.* Под действием линейного оператора матрица скалярного произведения преобразуется по формуле

$$(15.3) \quad I' = {}^t A I A;$$



$A$  будет преобразованием Лоренца, если  $I' = I$ .  $\square$

Найдем явно преобразования Лоренца в двумерном пространстве Минковского  $M^2$ . Пусть  $e_0, e_1$  — базис, в котором скалярное произведение имеет канонический вид, т.е.

$$I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если  $A$  — преобразование Лоренца с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

то из условия (15.3) получаем три соотношения на элементы матрицы  $A$ :

$$a^2 - c^2 = 1, \quad ab - cd = 0, \quad d^2 - b^2 = 1.$$

Пусть сперва  $a > 0, d > 0$ . Положив  $a = \operatorname{ch} \chi$ , получим из последних формул  $b = \pm \operatorname{sh} \chi, c = \pm \operatorname{sh} \chi, d = \operatorname{ch} \chi$ , причем знаки в формулах для  $b$  и  $c$  одинаковы. Заменяя при необходимости  $\chi$  на  $-\chi$ , можно всегда считать, что  $b = c = \operatorname{sh} \chi$ .

Меняя теперь знаки у  $a$  и  $d$ , получим, что матрица любого преобразования Лоренца представима в одном из четырех видов:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \chi & \operatorname{sh} \chi \\ \operatorname{sh} \chi & \operatorname{ch} \chi \end{pmatrix}, & A &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \chi & -\operatorname{sh} \chi \\ \operatorname{sh} \chi & -\operatorname{ch} \chi \end{pmatrix}, \\ A &= \begin{pmatrix} -\operatorname{ch} \chi & \operatorname{sh} \chi \\ -\operatorname{sh} \chi & \operatorname{ch} \chi \end{pmatrix}, & A &= \begin{pmatrix} -\operatorname{ch} \chi & -\operatorname{sh} \chi \\ -\operatorname{sh} \chi & -\operatorname{ch} \chi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь  $\chi$  — вещественное число. Матрицы первого типа определяют преобразования, называемые *гиперболическими поворотами на угол  $\chi$* ; ясно, что преобразования второго, третьего и четвертого типов представимы в виде композиции гиперболического поворота и осевых симметрий относительно прямых, проходящих через векторы  $e_0, e_1$  (т.е. преобразований  $x_1 \rightarrow -x_1$  и  $x_0 \rightarrow -x_0$  соответственно). Любое преобразование Лоренца оставляет на месте световой конус (в двумерном случае — это пара прямых  $x_0 = \pm x_1$ ); при этом две половины его внутренности (т.е. области, занятые времениподобными векторами) могут либо оставаться на месте, либо меняться местами. В зависимости от этого преобразования Лоренца называются *ортохронными* (т.е. не меняющими направления времени) или *неортохронными*. Ясно, что преобразование Лоренца  $A$  ортохронно тогда и только тогда, когда  $\langle A\xi, \xi \rangle < 0$  для любого времениподобного вектора  $\xi$ .

Зафиксируем ориентацию пространства Минковского (например, объявив исходный базис  $e_0, e_1$  положительно ориентированным). Преобразования Лоренца с положительным определителем сохраняют ориентацию (они называются *собственными*), а преобразования с отрицательным определителем меняют ее (такие преобразования называются *несобственными*). Очевидно, любой гиперболический поворот — собственное ортохронное преобразование; преобразование  $x_0 \rightarrow -x_0, x_1 \rightarrow x_1$  — несобственное неортохронное; преобразование  $x_0 \rightarrow x_0, x_1 \rightarrow -x_1$  — несобственное ортохронное; наконец, преобразование  $x_0 \rightarrow -x_0, x_1 \rightarrow -x_1$  — собственное неортохронное (то же относится и к любой композиции указанных преобразований с гиперболическим поворотом).

Рассмотрим теперь  $(n + 1)$ -мерное пространство Минковского, и пусть  $L$  — произвольное евклидово  $n$ -мерное подпространство в  $M^{n+1}$  (т.е. скалярное произведение на  $L$  положительно определено, см. параграф 15.2). Очевидно, ортогональное дополнение к  $L$  — времениподобная прямая  $l$ . Любое ортогональное преобразование  $L$ , оставляющее на месте все векторы из  $l$ , будет преобразованием Лоренца (докажите!); такие преобразования принято называть *евклидовыми ортогональными*.

Рассмотрим двумерное гиперболическое подпространство  $\mathbf{L}$ ; ортогональное дополнение  $\mathbf{I}$  к нему — евклидово пространство размерности  $n - 1$ . Описанные выше преобразования Лоренца плоскости  $\mathbf{L}$ , не меняющие векторов из  $\mathbf{I}$ , также будут преобразованиями Лоренца; в физической литературе такие преобразования иногда называют *бустами*.

Легко понять, что любое преобразование Лоренца представимо в виде композиции евклидова ортогонального преобразования и буста. Действительно, пусть  $e_0, \dots, e_n$  — ортонормированный базис в  $M^{n+1}$ . Каждое преобразование Лоренца  $A$  однозначно задается тем, куда оно переводит этот базис, т.е. ортонормированным базисом из векторов  $e'_i = Ae_i$ . Покажем, что любые два ортонормированных базиса  $\{e\}$  и  $\{e'\}$  можно совместить композицией евклидова ортогонального преобразования и буста. Действительно, рассмотрим сперва векторы  $e_0$  и  $e'_0$ ; если они не параллельны, то их линейная оболочка — двумерная гиперболическая плоскость (докажите!). Совершая буст в этой плоскости, можно перевести вектор  $e_0$  в  $e'_0$ . При этом векторы  $e_1, \dots, e_n$  перейдут в векторы  $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ , которые лежат в  $n$ -мерном евклидовом подпространстве векторов  $e'_1, \dots, e'_n$  и составляют там ортонормированный базис. Эти два базиса можно теперь совместить евклидовым ортогональным преобразованием. Если же векторы  $e_0$  и  $e'_0$  параллельны, то на первом шаге в их плоскости применяется либо тождественное

преобразование, либо преобразование, меняющее знак  $e_0$  и оставляющее на месте остальные векторы базиса  $\{e\}$ ; очевидно, это — частный случай буста.

**Задача 15.23.** Доказать, что любые два эллиптических (гиперболических, параболических) подпространства одинаковой размерности из  $M^{n+1}$  можно совместить преобразованием Лоренца.

## 15.4 Собственное время. Инерциальные наблюдатели. Относительность одновременности, сокращение длин и замедление времени

Обсудим основные факты геометрии пространства Минковского с точки зрения специальной теории относительности. Согласно основному принципу этой теории, все ортонормированные базисы с фиксированной пространственной и временной ориентацией (т.е. базисы, получающиеся друг из друга собственными ортохронными преобразованиями Лоренца) абсолютно равноправны, так что выделенных координат не существует (в частности, не существует и “абсолютного времени”). Каждый наблюдатель определяет в пространстве Минковского мировую линию, касательный вектор  $\xi$  к которой во всех точках времени подобен (см. параграф 15.1). Последнее обстоятельство позволяет определить длину дуги такой мировой линии; именно, если на ней задан параметр  $y$  и  $y_1 < y_2$  — значения параметра, определяющие две точки кривой, положим длину дуги  $l$  между этими точками равной

$$l = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{-\langle \xi(y), \xi(y) \rangle} dy.$$

В соответствии с этим определением на каждой мировой линии вводится натуральный параметр, равный длине дуги; в специальной теории относительности этот параметр, поделенный на скорость света  $c$ , называется *собственным временем наблюдателя* и интерпретируется как время, измеряемое по его часам. Если мировая линия — прямая, параметризованная натуральным параметром, наблюдатель называется *инерциальным*. Любые две времениподобные прямые можно совместить преобразованием Лоренца; таким образом, такие преобразования описывают пересчет пространственных и временных координат у разных инерциальных наблюдателей. Выясним подробнее, как

устроен этот пересчет. Для этого рассмотрим двумерную плоскость  $L$ , натянутую на мировые линии двух инерциальных наблюдателей (очевидно, это — двумерное пространство Минковского). Будем считать, что единичные направляющие векторы  $e_0, \tilde{e}_0$  мировых линий одинаково ориентированы во времени (см. параграф 15.1), и дополним их до ортонормированных одинаково ориентированных базисов в  $L$  векторами  $e_1$  и  $\tilde{e}_1$ . Пусть вектор  $\xi \in L$  определяет некоторое событие; его координаты  $\xi^0, \xi^1$  в базисе  $e_0, e_1$  — это время (поделенное на скорость света  $c$ ) и координата события с точки зрения первого наблюдателя, а координаты  $\tilde{\xi}^0, \tilde{\xi}^1$  во втором базисе — время и координата события с точки зрения второго наблюдателя. Поскольку базис  $e_0, e_1$  можно перевести в  $\tilde{e}_0, \tilde{e}_1$  гиперболическим поворотом, величины  $\xi^0, \xi^1$  связаны с  $\tilde{\xi}^0, \tilde{\xi}^1$  посредством формул

$$\tilde{\xi}^0 = \xi^0 \operatorname{ch} \chi - \xi^1 \operatorname{sh} \chi, \quad \tilde{\xi}^1 = -\xi^0 \operatorname{sh} \chi + \xi^1 \operatorname{ch} \chi$$

(напомним, что координаты преобразуются посредством матрицы, обратной к матрице перехода между базисами). Выясним физический смысл угла гиперболического поворота  $\chi$ . Для этого рассмотрим второго наблюдателя с точки зрения первого. Мировая линия второго наблюдателя в координатах  $\tilde{x}_0 = \xi^0/c, \tilde{x}_1 = \xi^1$  — это прямая  $\tilde{x}_1 = 0$ ; с точки зрения первого наблюдателя она имеет вид  $-x_0 \operatorname{sh}(\chi/c) + x_1 \operatorname{ch} \chi = 0$ , и скорость второго относительно первого  $v = c x_1/x_0 = c \operatorname{th} \chi$ . Таким образом, угол  $\chi$  связан с относительной скоростью наблюдателей  $v$  соотношениями

$$\operatorname{th} \chi = \frac{v}{c}, \quad \operatorname{ch} \chi = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad \operatorname{sh} \chi = \frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Теперь закон преобразования координат события  $\xi$  можно переписать следующим образом:

$$\tilde{t} = \frac{t + (v/c^2)x}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad \tilde{x} = \frac{x + vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Здесь  $t = \xi_0/c, x = \xi_1, \tilde{t} = \tilde{\xi}_0/c, \tilde{x} = \tilde{\xi}_1$  — время и координата события  $\xi$  с точки зрения первого и второго наблюдателя соответственно,  $v$  — скорость второго наблюдателя относительно первого.

**Замечание 15.24.** В физической литературе именно эти формулы принято называть преобразованиями Лоренца.

Обсудим теперь следствия, вытекающие из этого закона преобразования.

### Относительность одновременности

Пусть два события  $\xi_1, \xi_2$  произошли с точки зрения первого наблюдателя одновременно, но в разных местах, т.е.  $\xi_1^0 = \xi_2^0, \xi_1^1 \neq \xi_2^1$ . Тогда, как следует из приведенных выше формул, с точки зрения второго они уже одновременными не будут: разница во времени между ними составит

$$\frac{|\tilde{\xi}_1^0 - \tilde{\xi}_2^0|}{c} = |\xi_1^1 - \xi_2^1| \operatorname{sh} \chi = \frac{v}{c^2} \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{1 - (v/c)^2}},$$

где  $x_j$  — пространственная координата  $j$ -го события с точки зрения первого наблюдателя.

### Сокращение длин

Рассмотрим твердый стержень, неподвижный с точки зрения первого наблюдателя. Чтобы измерить его длину, первому наблюдателю достаточно рассмотреть любые два события, произошедшие в любые моменты времени в точках, соответствующих краям стержня, и вычислить модуль разности пространственных координат этих событий. С точки зрения второго наблюдателя (относительно которого стержень движется) длина вычисляется аналогично, однако события *должны быть одновременными с точки зрения второго наблюдателя*. Итак, рассмотрим два события: пусть первое — это начало координат, а второе — вектор  $\xi$ , причем  $\xi^0 = 0$  (это равенство означает одновременность  $\xi$  и 0 с точки зрения второго наблюдателя). Очевидно, с точки зрения движущегося (относительно стержня) наблюдателя, квадрат длины стержня равен  $\tilde{l}^2 = \langle \tilde{\xi}, \tilde{\xi} \rangle$ ; с точки зрения первого наблюдателя  $l^2 = \langle \eta, \eta \rangle$ , где  $\eta$  — “пространственная” проекция вектора  $\xi$  (т.е.  $\xi = \eta_0 + \eta, \eta_0 = \xi^0 e_0$ ). Поскольку  $\langle \eta_0, \eta_0 \rangle < 0$ , имеем  $\tilde{l}^2 = \langle \eta_0, \eta_0 \rangle + l^2 < l^2$ . Таким образом, *длина стержня максимальна с точки зрения того наблюдателя, для которого стержень покоится; с точки зрения движущегося наблюдателя стержень имеет меньшую длину*.

**Задача 15.25.** Выразить отношение длин стержня относительно неподвижного и движущегося наблюдателей через их относительную скорость.

### Замедление времени

Рассмотрим теперь часы первого наблюдателя с точки зрения второго. Пусть два события 0,  $\xi$  произошли для первого наблюдателя в одном

и том же месте, но в разные моменты времени (в эти моменты первый наблюдатель посмотрел на часы); тогда  $\xi = \xi^0 e_0$  — времениподобный вектор. Время, прошедшее по часам первого наблюдателя, равно  $\delta t = \sqrt{-\langle \xi, \xi \rangle} / c$ . С точки зрения второго наблюдателя, это время равно “длине временной проекции” вектора  $\xi$  в его системе координат, т.е.  $\tilde{\delta} t = \sqrt{-\langle \eta_0, \eta_0 \rangle}$ , где  $\xi = \eta_0 + \eta$ ,  $\eta_0 = \tilde{\xi}^0 \tilde{e}_0$ . Поскольку  $\langle \eta, \eta \rangle > 0$ , имеем  $\delta t^2 = \tilde{\delta} t^2 - \langle \eta, \eta \rangle < \tilde{\delta} t^2$ . Таким образом, движущиеся часы идут медленнее неподвижных.

**Задача 15.26.** Выразить отношение  $\tilde{\delta} t / \delta t$  через относительную скорость наблюдателей.

## 15.5 Собственное время. Инерциальные наблюдатели. Неравенство Коши–Буняковского, неравенство треугольника и парадокс близнецов

Еще одно свойство пространства Минковского, отличающее его от евклидова, состоит в том, что неравенство Коши–Буняковского для времениподобных векторов направлено в противоположную сторону.

**Предложение 15.27.** Пусть векторы  $\xi, \eta \in M^{n+1}$  времениподобны. Тогда  $\langle \xi, \eta \rangle^2 \geq \langle \xi, \xi \rangle \langle \eta, \eta \rangle$ , причем равенство достигается тогда и только тогда, когда  $\xi$  и  $\eta$  параллельны.

*Доказательство.* Выберем ортонормированный базис так, чтобы вектор временной координаты был направлен вдоль  $\xi$ :  $\xi = \lambda e_0$ . Тогда

$$\langle \xi, \eta \rangle^2 = \lambda^2 (\eta^0)^2, \quad \langle \eta, \eta \rangle \langle \xi, \xi \rangle = \lambda^2 (\eta_0^2 - (\eta^1)^2 - \dots - (\eta^n)^2)^2 \leq \lambda^2 (\eta^0)^2,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда  $\eta^k = 0$  при всех  $k = 1, \dots, n$ , т.е. когда  $\eta$  и  $\xi$  параллельны.  $\square$

**Следствие 15.28** (Математическое следствие: неравенство треугольника в обратную сторону). Пусть векторы  $\xi, \eta$  времениподобны и  $\langle \xi, \eta \rangle < 0$  (т.е. эти векторы одинаково ориентированы по времени). Тогда вектор  $\xi + \eta$  времениподобен и

$$|\xi + \eta| \geq |\xi| + |\eta|.$$

Здесь длина любого времениподобного вектора  $\zeta$  по определению равна  $|\zeta| = \sqrt{-\langle \zeta, \zeta \rangle}$ ; равенство достигается, только если  $\xi$  и  $\eta$  линейно зависимы.

*Доказательство.* Имеем

$$\begin{aligned} |\xi + \eta|^2 &= -\langle \xi + \eta, \xi + \eta \rangle = -\langle \xi, \xi \rangle - \langle \eta, \eta \rangle - 2\langle \xi, \eta \rangle = \\ &= |\xi|^2 + |\eta|^2 + 2|\langle \xi, \eta \rangle| \geq |\xi|^2 + 2|\xi||\eta| + |\eta|^2 = (|\xi| + |\eta|)^2, \end{aligned}$$

причем равенство достигается только в случае параллельных векторов.  $\square$

### Физическое следствие: парадокс близнецов

Пусть два близнеца расстались (время и место расставания примем за начало координат); после этого один из них двигался инерциально от точки 0 до точки  $\xi + \eta$  (можно, например, считать, что он покоился), а другой двигался сначала от нуля до  $\xi$ , а затем от  $\xi$  до  $\xi + \eta$ ; в этой точке их мировые линии пересеклись, т.е. они встретились. Собственное время неподвижного брата (т.е. время, прошедшее по его часам) будет при встрече равно  $|\xi + \eta|/c$ , а собственное время летавшего брата — равно  $(|\xi| + |\eta|)/c$ . Согласно неравенству треугольника, первое время больше, так что близнец, сидевший дома, может сильно состариться, в то время как близнец-путешественник будет еще молодым. Отметим, что братья, конечно, не находятся в симметричной ситуации: мировая линия путешественника не прямая, а ломаная, так что он не инерциален. Другими словами, чтобы вернуться в исходную точку, ему придется двигаться с ускорением (например, он может включить двигатели своего космического корабля около 0 и около  $\xi$  с тем, чтобы сначала улететь от брата, а затем вернуться к нему).

## Литература к главе 15

- [1] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. *Курс дифференциальной геометрии и топологии*. СПб: Лань, 2010.
- [2] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия*, в 3-х т. М: URSS, 2013.
- [3] Алексеевский Д.В., Винберг Э.Б., Солодовников А.С. *Геометрия пространств постоянной кривизны*. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 29 (Геометрия-2). М: ВИНТИ, 1988.

## Упражнения к главе 15

**Упражнение 15.1.** Пусть  $L$  — линейное подпространство в пространстве Минковского  $M^{n+1}$  размерности  $k + 1$  ( $k = 0, \dots, n$ ). Доказать, что  $L^\perp$  — линейное подпространство,  $\dim L^\perp = (n - k)$  и  $(L^\perp)^\perp = L$ .

**Упражнение 15.2.** Доказать, что любые два эллиптических (гиперболических, параболических) подпространства одинаковой размерности из пространства Минковского  $M^{n+1}$  можно совместить преобразованием Лоренца.

**Упражнение 15.3.** Выразить отношение длин стержня относительно неподвижного и движущегося наблюдателей через их относительную скорость.

**Упражнение 15.4.** Выразить отношение  $\tilde{\delta t}/\delta t$  через относительную скорость наблюдателей.



## Глава 16

# Геометрия Лобачевского

**План.** Псевдосфера в пространстве Минковского, геометрия Лобачевского, прямые на плоскости Лобачевского, нарушение аксиомы параллельных в геометрии Лобачевского, расстояние на плоскости Лобачевского, окружности и треугольники на плоскости Лобачевского, длина окружности и площадь круга, соотношение между длинами сторон и углами треугольников, признаки равенства треугольников, модели Пуанкаре.

### 16.1 Псевдосфера в пространстве Минковского

Геометрия Лобачевского возникла из желания доказать (исходя из остальных аксиом планиметрии) пятый постулат Евклида, который утверждает, что через каждую точку плоскости, не лежащую на фиксированной прямой, проходит ровно одна прямая, параллельная данной. Попытки доказать это утверждение “от противного” не приводили к противоречию; напротив, возникла своеобразная и красивая теория, отличающаяся от геометрии Евклида. Важный вопрос о непротиворечивости этой теории был разрешен после появления моделей геометрии Лобачевского, позволивших полностью описать ее в терминах алгебры, анализа и обычной геометрии. В этой главе мы будем иметь дело с двумя основными моделями плоскости Лобачевского — векторной моделью и моделью Пуанкаре.

Рассмотрим трехмерное пространство Минковского  $M^3$  и зафиксируем в нем ортонормированный базис  $e_0, e_1, e_2$ ; координаты в этом базисе будем обозначать через  $x_0, x_1, x_2$ . Геометрия Лобачевского реализуется на поверхности в этом пространстве, называемой псевдосферой.

**Определение 16.1.** *Псевдосферой* в пространстве Минковского называется поверхность, заданная уравнением  $\langle \xi, \xi \rangle = -1$ .

В координатах  $x_0, x_1, x_2$  уравнение псевдосферы имеет вид  $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1$ ; если представлять себе эти координаты как координаты в обычном трехмерном пространстве, то псевдосфера — это двуполостный гиперболоид. Ясно, что все точки псевдосферы (точнее, их радиус-векторы) времениподобны, так что этот гиперболоид лежит целиком внутри светового конуса. В дальнейшем мы будем рассматривать только одну половину псевдосферы, а именно ту, для которой  $x_0 > 0$  (соответствующие радиус-векторы ориентированы во времени так же, как вектор  $e_0$ ).

## 16.2 Касательная плоскость к псевдосфере и геометрия Лобачевского

Для изучения геометрии, возникающей на псевдосфере, важную роль играют касательные плоскости. Оказывается, они очень похожи на касательные плоскости к сфере в евклидовом пространстве. Действительно, рассмотрим в пространстве Минковского произвольную гладкую кривую  $\xi = \xi(t)$ , лежащую на псевдосфере (т.е. закон движения точки по этой поверхности). Дифференцируя равенство  $\langle \xi(t), \xi(t) \rangle = -1$ , получим, что  $\langle \dot{\xi}, \xi \rangle = 0$ , т.е. *вектор скорости любой кривой, лежащей на псевдосфере, ортогонален радиус-вектору*. Множество таких векторов естественно называть касательной плоскостью к псевдосфере; сформулируем формальное определение.

**Определение 16.2.** *Касательным вектором к псевдосфере в точке  $\xi$*  называется вектор  $\eta$ , отложенный от этой точки и ортогональный радиус-вектору, т.е. такой, что  $\langle \xi, \eta \rangle = 0$ . Множество касательных векторов к псевдосфере в данной точке  $\xi$  называется *касательной плоскостью*.

**Замечание 16.3.** Отметим, что *скалярный квадрат любого касательного вектора к псевдосфере положителен, т.е. все касательные плоскости пространственноподобны (докажите!)*. Это обстоятельство играет важнейшую роль в построении геометрии Лобачевского — пользуясь им, мы можем определить на псевдосфере длины кривых, углы между ними, движения и прямые совершенно аналогично тому, как это делалось на плоскости или на евклидовой сфере.

**Определение 16.4.** (1) *Длиной касательного вектора  $\eta$  к псевдосфере* называется квадратный корень из его скалярного квадрата:  $\|\eta\| = \sqrt{\langle \eta, \eta \rangle}$ .

- (2) *Углом между двумя касательными векторами  $\eta, \zeta$  (в одной и той же точке) к псевдосфере* называется число  $\alpha$ , вычисляемое по формуле

$$\cos \alpha = \frac{\langle \eta, \zeta \rangle}{\|\eta\| \|\zeta\|}.$$

- (3) *Длиной дуги между точками  $t_1, t_2, t_1 < t_2$ , кривой  $\xi = \xi(t)$ , лежащей на псевдосфере,* называется интеграл от длины ее вектора скорости:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\xi}(t)\| dt.$$

- (4) *Углом между пересекающимися кривыми на псевдосфере* называется угол между векторами скорости к этим кривым в точке их пересечения.

Таким образом, на половине псевдосфере пространства Минковского возникает геометрия, аналогичная геометрии на сфере в трехмерном евклидовом пространстве.

**Определение 16.5.** Эта геометрия называется *геометрией Лобачевского*, а сама половина псевдосферы — *плоскостью Лобачевского* (точнее, ее векторной моделью).

**Замечание 16.6.** Псевдосферу можно задать параметрическими уравнениями (проверьте!)  $\xi = (\text{ch } u, \text{sh } u \cos v, \text{sh } u \sin v)$ . Параметры  $u, v$  играют роль координат на плоскости Лобачевского; они называются псевдосферическими координатами.

### 16.3 Движения и прямые плоскости Лобачевского

Плоскость Лобачевского (так же, как сфера и евклидова плоскость), допускает много движений, т.е. преобразований, сохраняющих длины и углы. Действительно, ясно, что любое преобразование Лоренца в  $M^3$ , оставляющее половину псевдосферы на месте (т.е. ортохронное), будет движением — при указанном преобразовании сохраняются скалярные произведения любых векторов из  $M^3$ , а значит, и векторов,

касающихся псевдосферы. Следовательно, любое ортохронное преобразование Лоренца сохраняет длины кривых и углы между кривыми на плоскости Лобачевского (так как длины и углы выражаются только через скалярные произведения касательных векторов). Таких преобразований Лоренца можно указать довольно много — это (евклидовы) повороты в плоскости  $e_1, e_2$  вокруг оси  $e_0$ , отражения относительно любой плоскости, проходящей через эту ось и гиперболические повороты (бусты) в любой такой плоскости<sup>1</sup>. Ясно, что композицией преобразований указанного вида можно любую точку псевдосферы перевести в любую другую точку; кроме того, любое направление касательного вектора в данной точке можно перевести в любое другое направление.

Прямые на плоскости Лобачевского определяются аналогично прямым на сфере.

**Определение 16.7.** *Прямыми на плоскости Лобачевского* называются кривые, получающиеся пересечением псевдосферы плоскостями, проходящими через начало координат.

**Замечание 16.8.** Таким образом, прямые на псевдосфере находятся во взаимно-однозначном соответствии с гиперболическими плоскостями; поэтому многие факты геометрии Лобачевского, касающиеся прямых, вытекают из линейной алгебры пространства Минковского (точнее, из свойств двумерных гиперболических подпространств в  $M^3$ ).

**Замечание 16.9.** Прямые плоскости Лобачевского больше похожи на евклидовы, чем прямые на сфере. Действительно, на плоскости Лобачевского через каждые две точки проходит ровно одна прямая и любая прямая неограничена (проверьте!). Главное отличие поведения прямых Лобачевского от евклидовых состоит в нарушении постулата параллельных, которое мы сейчас обсудим.

---

<sup>1</sup>Поясним, что понимается под последним типом преобразований. Рассмотрим произвольную плоскость, содержащую вектор  $e_0$ ; она пересекает плоскость  $e_1, e_2$  по пространственноподобной прямой. Пусть  $e'_1$  — направляющий вектор этой прямой, а  $e'_2$  — ортогональный ему пространственноподобный вектор, лежащий в плоскости  $e_1, e_2$  (таким образом,  $e'_1, e'_2$  — ортонормированный базис в этой плоскости; он получается поворотом из старого базиса  $e_1, e_2$ ). Тем самым мы получили новый ортонормированный базис  $e_0, e'_1, e'_2$  в пространстве Минковского; ему соответствуют координаты  $x_0, x'_1, x'_2$ . Рассмотрим теперь преобразование Лоренца, не меняющее координаты  $x'_2$  и преобразующие  $x_0, x'_1$  при помощи матрицы гиперболического поворота; это и есть то, что было названо гиперболическим поворотом в плоскости, проходящей через ось  $e_0$ .

## 16.4 Нарушение аксиомы параллельных

Убедимся в том, что на плоскости Лобачевского нарушается пятый постулат Евклида. Для этого рассмотрим на ней прямую (гиперболу)  $l: x_2 = 0$  и точку  $P$  с радиус-вектором  $\xi$ , лежащую в плоскости  $x_1 = 0$  (см. рис. 16.1).

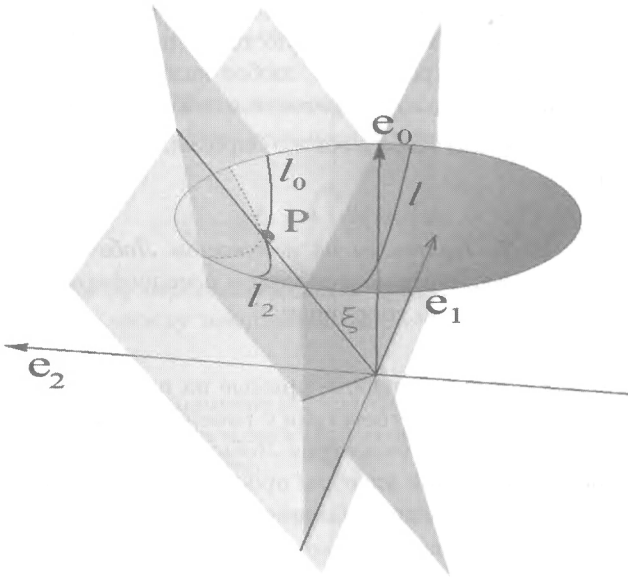


Рис. 16.1: Нарушение пятого постулата Евклида на плоскости Лобачевского

Ясно, что прямая  $l_0$ , получающаяся пересечением псевдосферы с плоскостью, проходящей через векторы  $\xi$  и  $e_1$ , проходит через  $P$  и параллельна  $l$ : плоскости, в которой лежат эти две кривые, пересекаются по оси  $e_1$ , которая не имеет общих точек с псевдосферой, а значит, и с кривыми  $l, l_0$ . Будем теперь поворачивать плоскость вокруг вектора  $\xi$ . Линия пересечения повернутой плоскости с плоскостью  $x_2 = 0$  — прямая, лежащая в последней плоскости. При повороте эта прямая (которая изначально совпадала с осью  $e_1$ ), будет поворачиваться; ясно однако, что до тех пор, пока она не попадет на световой конус, т.е. ее направляющий вектор не станет равным  $e_1 + e_0$ , указанная прямая не будет пересекаться с псевдосферой. Поэтому все линии пересечения

поворачиваемых плоскостей с псевдосферой будут оставаться параллельными  $l$ ; таких прямых, очевидно, бесконечно много: все они расположены между двумя предельными прямыми  $l_1, l_2$ , где прямая  $l_1$  лежит в плоскости векторов  $\xi$  и  $e_1 + e_0$ , а прямая  $l_2$  — в плоскости векторов  $\xi$  и  $e_0 - e_1$ .

**Замечание 16.10.** Очевидно, две произвольные прямые на плоскости Лобачевского будут параллельными (т.е. не будут пересекаться) тогда и только тогда, когда прямая пересечения определяющих их двумерных плоскостей пространственноподобна или изотропна. Нарушение аксиомы параллельных поэтому следует из следующего простого факта линейной алгебры в  $M^3$ : для данной гиперболической плоскости  $L$  и данного не лежащего в ней времениподобного вектора  $\xi$  существует бесконечно много двумерных гиперболических плоскостей, проходящих через  $\xi$  и пересекающихся с  $L$  по пространственноподобной прямой — они натянуты на вектор  $\xi$  и произвольный пространственноподобный вектор из  $L$ .

## 16.5 Расстояние на плоскости Лобачевского

Через любые две точки плоскости Лобачевского проходит ровно одна прямая — она лежит в плоскости, проходящей через эти точки и начало координат.

**Определение 16.11.** *Расстоянием между двумя точками плоскости Лобачевского* называется длина дуги прямой, заключенной между этими точками.

Оказывается, расстояние можно вычислить по формуле, очень похожей на соответствующую формулу сферической геометрии.

**Предложение 16.12.** *Расстояние  $\rho$  между двумя точками с радиус-векторами  $\xi_1, \xi_2$  удовлетворяет равенству  $\text{ch } \rho = -\langle \xi_1, \xi_2 \rangle$ .*

*Доказательство.* Утверждение инвариантно относительно движений плоскости Лобачевского. Поэтому достаточно проверить его для двух точек, лежащих на прямой  $x_2 = 0$  (любую другую можно перевести в эту движением). В координатах  $u, v$  указанная прямая задается уравнениями  $u = u, v = 0$ ; пусть координаты заданных точек  $u = u_1, v = 0$  и  $u = u_2, v = 0$  соответственно. Вычисляя длину дуги прямой между этими точками, получим

$$\rho = \int_{u_1}^{u_2} du = u_2 - u_1$$

(касательный вектор к прямой имеет вид  $(\operatorname{sh} u, \operatorname{ch} u, 0)$ ; его длина равна единице). С другой стороны, векторы  $\xi_1, \xi_2$ , очевидно, имеют вид  $\xi_j = (\operatorname{ch} u_j, \operatorname{sh} u_j, 0)$ , поэтому

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = -\operatorname{ch} u_1 \operatorname{ch} u_2 + \operatorname{sh} u_1 \operatorname{sh} u_2 = -\operatorname{ch}(u_2 - u_1),$$

откуда немедленно следует требуемая формула.  $\square$

## 16.6 Окружности на плоскости Лобачевского

**Определение 16.13.** *Окружностью с центром в точке  $P$  радиуса  $a$  на плоскости Лобачевского называется множество точек, находящихся на расстоянии  $a$  от точки  $P$ .*

Оказывается, формула для длины окружности также напоминает соответствующую формулу сферической геометрии.

**Предложение 16.14.** *Длина  $l$  окружности радиуса  $a$  на плоскости Лобачевского равна  $l = 2\pi \operatorname{sh} a$ .*

*Доказательство.* Утверждение инвариантно относительно движений, поэтому его достаточно проверить для окружности с центром в точке  $(1, 0, 0)$ . Такая окружность, очевидно, является евклидовой окружностью (параллелью псевдосферы); в координатах  $u, v$  она задается уравнениями  $u = a, v = v, v \in [0, 2\pi]$  (см. предыдущий пункт). Координаты касательного вектора к ней суть  $(\operatorname{ch} a, \operatorname{sh} a \cos v, \operatorname{sh} a \sin v)$  и его длина равна  $\operatorname{sh} a$ . Таким образом, длина окружности  $l$  равна

$$l = \int_0^{2\pi} \operatorname{sh} a \, dv = 2\pi \operatorname{sh} a.$$

$\square$

## 16.7 Треугольники на плоскости Лобачевского

Треугольники на плоскости Лобачевского определяются обычным способом — рассматриваем произвольные три точки  $A, B, C$  и соединяем их попарно дугами прямых. Формулы решения треугольников и признаки их равенства в геометрии Лобачевского похожи на соответствующие утверждения сферической геометрии.

**Предложение 16.15** (Теорема косинусов). Пусть  $a, b, c$  — длины сторон треугольника на плоскости Лобачевского, а  $\alpha, \beta, \gamma$  — противолежащие им углы. Тогда имеет место равенство

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos \alpha.$$

**Задача 16.16.** Докажите это утверждение.

(Вспомните доказательство сферической теоремы косинусов.)

**Задача 16.17.** Докажите на плоскости Лобачевского теорему синусов

$$\frac{\sin \alpha}{\operatorname{sh} a} = \frac{\sin \beta}{\operatorname{sh} b} = \frac{\sin \gamma}{\operatorname{sh} c}.$$

(Она получается из теоремы косинусов алгебраической выкладкой, см. аналогичное утверждение для сферы.)

Как и в сферической геометрии, в геометрии Лобачевского углы треугольника определяют его стороны. Соответствующая формула также называется двойственной теоремой косинусов.

**Предложение 16.18** (Двойственная теорема косинусов).

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \operatorname{ch} a.$$

*Доказательство.* На плоскости Лобачевского, в отличие от сферы, нет полярных треугольников, поэтому для доказательства двойственной теоремы косинусов приходится применять алгебраические вычисления (это можно сделать и на сфере, но там проще воспользоваться полярной конструкцией). Выразим косинусы углов через стороны треугольника из теоремы косинусов. Получим

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma &= \\ &= \frac{\operatorname{sh}^2 a (\operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} a) + (\operatorname{ch} a \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} b)(\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} c)}{\operatorname{sh}^2 a \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c}. \end{aligned}$$

Раскрывая в числителе скобки и выражая гиперболический синус через косинус, получим

$$\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma = \operatorname{ch} a \frac{1 + 2 \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{ch}^2 a - \operatorname{ch}^2 b - \operatorname{ch}^2 c}{\operatorname{sh}^2 a \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c}.$$

С другой стороны, из той же теоремы косинусов получаем

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \left( \frac{\operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a \operatorname{ch} c}{\operatorname{sh} a \operatorname{sh} c} \right)^2}.$$



Раскрывая скобки под квадратным корнем и выражая в числителе гиперболический синус через косинус, получим

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{1 + 2 \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{ch}^2 a - \operatorname{ch}^2 b - \operatorname{ch}^2 c}}{\operatorname{sh} a \operatorname{sh} c}.$$

Аналогично,

$$\sin \gamma = \frac{\sqrt{1 + 2 \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{ch}^2 a - \operatorname{ch}^2 b - \operatorname{ch}^2 c}}{\operatorname{sh} a \operatorname{sh} b}.$$

Перемножая два последних равенства и сравнивая с выражением для  $\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma$ , получим требуемую формулу.  $\square$

**Замечание 16.19.** Из выписанных формул следуют признаки равенства треугольников, аналогичные полученным ранее для геометрии на сфере. Именно, назовем два треугольника на плоскости Лобачевского *равными*, если их можно перевести один в другой движением (убедитесь, что это требование равносильно равенству сторон и углов). Очевидно, имеют место следующие признаки равенства треугольников:

- (1) по трем сторонам;
- (2) по двум сторонам и углу между ними;
- (3) по стороне и двум прилежащим к ней углам;
- (4) по трем углам

(последний признак не имеет аналога в евклидовом случае, но справедлив в сферическом).

**Замечание 16.20.** Если линейные размеры (радиус окружности, стороны треугольника и т.д.) стремятся к нулю, все формулы геометрии Лобачевского переходят в соответствующие формулы евклидовой геометрии (проверьте!).

**Замечание 16.21.** Если в формулах сферической геометрии формально заменить радиус сферы  $R$  на мнимую единицу  $i$ , то эти формулы перейдут в соответствующие формулы геометрии Лобачевского (убедитесь в этом на примере формул, полученных в главе о сферической геометрии). Таким образом, геометрия Лобачевского — это геометрия на сфере мнимого радиуса. Конечно, такое утверждение не имеет строгого математического смысла; его реальное содержание состоит в том, что геометрия Лобачевского реализуется на псевдосфере  $\langle \xi, \xi \rangle = -1$ .

## 16.8 Стереографическая проекция псевдосферы. Метрика Лобачевского в модели Пуанкаре на единичном круге

Выше мы ввели на плоскости Лобачевского координаты  $u, v$ , аналогичные широте и долготе на сфере. Эти координаты обладают тем же самым недостатком, что и сферические: они вырождаются в полюсе псевдосферы — точке  $(1, 0, 0)$  (эта единственная точка в координатах  $u, v$  задается целым промежутком  $u = 0, v$  — любое). В сферической геометрии такой недостаток не устраним: не существует глобальных координат на всей сфере, пробегающих открытую область плоскости. В случае плоскости Лобачевского это не так: ее можно параметризовать глобально. Это обстоятельство удобно тем, что в таких глобальных координатах все точки плоскости Лобачевского изображаются точками одной области на обычной плоскости, поэтому и все утверждения геометрии Лобачевского можно переформулировать в терминах планиметрии (т.е. вовсе не обращаясь к трехмерному пространству Минковского). Это, конечно, не означает, что геометрия Лобачевского и геометрия на обычной плоскости устроены одинаково (мы уже видели, что это совсем не так); дело в том, что при изображении точек плоскости Лобачевского точками обычной плоскости все длины “искажаются”, т.е. расстояния задаются совсем другими формулами, чем в евклидовой геометрии, а потому и геометрические теоремы оказываются другими.

Существуют разные способы изображения геометрии Лобачевского точками плоскости; ниже мы обсудим две такие модели (которые имеют так много общего, что часто рассматриваются как два варианта одной модели) — так называемые модели Пуанкаре.

Первый способ глобальной параметризации плоскости Лобачевского состоит в следующем. Рассмотрим произвольную точку  $P$ , лежащую на псевдосфере, и проведем через нее прямую, проходящую через точку  $A(-1, 0, 0)$  (полюс нижней полости гиперболоида). Эта прямая пересечет плоскость  $e_1, e_2$  в единственной точке  $P'$ , причем эта точка будет лежать внутри единичного круга на этой плоскости (т.е. ее координаты  $x_1, x_2$  удовлетворяют неравенству  $x_1^2 + x_2^2 < 1$ ) — евклидов угол прямой  $PP'$  с осью  $e_0$  меньше  $\pi/4$  (см. рисунок 16.2). Обратно, для всякой точки  $P'$ , лежащей внутри единичного круга на плоскости  $e_1, e_2$ , прямая, проходящая через  $P'$  и точку  $(-1, 0, 0)$ , пересечет псевдосферу в единственной точке  $P$ . Таким образом, мы получили взаимно однозначное соответствие между точками плоскости Лобачевского

и точками единичного круга на плоскости  $e_1, e_2$ ; такое отображение псевдосферы в плоскость называется *стереографической проекцией*.

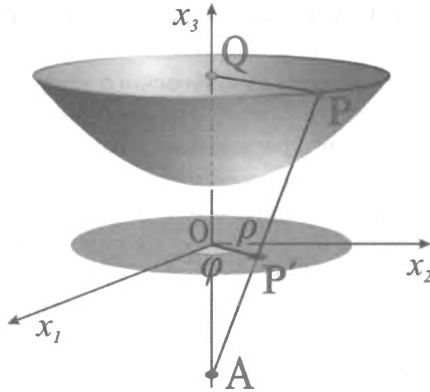


Рис. 16.2: Стереографическая проекция

Будем задавать каждую точку  $P$  псевдосферы координатами  $x_1, x_2$  ее стереографической проекции  $P'$ ; тем самым мы получили глобальную параметризацию псевдосферы, причем параметризующие координаты меняются в единичном круге. Чтобы иметь возможность вычислять длины и углы, получим формулу для скалярного произведения касательных векторов к кривым. Рассмотрим сперва исходные (“псевдосферические”) координаты  $(u, v)$ ; если кривая  $\gamma$  задана параметрическими уравнениями  $u = u(t), v = v(t)$ , ее вектор скорости равен

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{du}{dt}(\text{sh } u, \text{ch } u \cos v, \text{ch } u \sin v) + \frac{dv}{dt}(0, -\text{sh } u \sin v, \text{sh } u \cos v),$$

поэтому скалярное произведение двух касательных векторов  $\xi, \eta$  вычисляется по формуле

$$\langle \xi, \eta \rangle = \frac{du}{dt} \frac{du}{d\tau} + \text{sh}^2 u \frac{dv}{dt} \frac{dv}{d\tau},$$

где  $t, \tau$  — параметры на соответствующих кривых. Рассмотрим теперь координаты стереографической проекции; пусть сперва  $\rho, \varphi$  — полярные координаты на плоскости  $x_1, x_2$  ( $x_1 = \rho \cos \varphi, x_2 = \rho \sin \varphi$ ). Из рис. 16.2 видно, что координаты  $\rho, \varphi$  связаны с исходными  $u, v$  по формулам  $\varphi = v, \rho = \text{sh } u / (1 + \text{ch } u)$  (треугольник  $APQ$  подобен

треугольнику  $AP'O$ ). Подставляя эти равенства в формулу для скалярного произведения, получим

$$\langle \xi, \eta \rangle = \frac{4}{(1 - \rho^2)^2} \left( \frac{d\rho}{dt} \frac{d\rho}{d\tau} + \rho^2 \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\varphi}{d\tau} \right).$$

Наконец, переходя от полярных координат  $\rho, \varphi$  к декартовым  $x_1, x_2$ , получим

$$\langle \xi, \eta \rangle = \frac{4}{(1 - (x_1^2 + x_2^2))^2} \left( \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_1}{d\tau} + \frac{dx_2}{dt} \frac{dx_2}{d\tau} \right).$$

**Определение 16.22.** Моделью Пуанкаре плоскости Лобачевского на единичном круге называется внутренность единичного круга  $x_1^2 + x_2^2 < 1$  на плоскости  $x_1, x_2$ , причем скалярное произведение касательных векторов к кривым задается приведенной формулой.

**Замечание 16.23.** Точно так же, как и векторной модели, задание скалярного произведения автоматически определяет правила вычисления длин и углов: по определению, *длиной кривой* называется интеграл от длины ее вектора скорости, а *углом между пересекающимися кривыми* — угол между их касательными векторами.

**Замечание 16.24.** После того, как формула для скалярного произведения получена, мы можем забыть про псевдосферу и изучать только геометрические объекты, живущие в единичном круге. Таким образом, мы свели все задачи геометрии Лобачевского к задачам планиметрии со специальным образом определенным (неевклидовым) скалярным произведением.

## 16.9 Комплексные координаты и комплексная запись скалярного произведения

При изучении моделей Пуанкаре удобно пользоваться комплексным языком. Именно, будем представлять себе плоскость  $x_1, x_2$  как комплексную плоскость, т.е. для каждой точки рассмотрим комплексное число  $w = x_1 + ix_2$  и комплексно-сопряженное ему  $\bar{w} = x_1 - ix_2$ . Эти числа называются *комплексными* (точнее, *комплексно-сопряженными*) координатами точки  $(x_1, x_2)$ . Каждая кривая, заданная параметрическими уравнениями  $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t)$ , в комплексных координатах задается уравнениями  $w = w(t), \bar{w} = \bar{w}(t)$ ; ясно, что

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dt} + \frac{d\bar{w}}{dt} \right), \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{2i} \left( \frac{dw}{dt} - \frac{d\bar{w}}{dt} \right), \quad x_1^2 + x_2^2 = w\bar{w} = |w|^2.$$

Подставляя эти формулы в полученное выше выражение для скалярного произведения касательных векторов, получим

$$\langle \xi, \eta \rangle = \frac{2}{(1 - |w|^2)^2} \left( \frac{dw}{dt} \frac{d\bar{w}}{d\tau} + \frac{dw}{d\tau} \frac{d\bar{w}}{dt} \right).$$

## 16.10 Модель Пуанкаре в верхней полуплоскости

Наряду с моделью Пуанкаре плоскости Лобачевского в единичном круге, используется и другая — модель Пуанкаре на верхней полуплоскости. Она строится следующим образом. Рассмотрим дробно-линейное преобразование комплексной плоскости

$$w \mapsto z = i \frac{1 - w}{1 + w}.$$

При этом преобразовании единичный круг  $|w| < 1$  взаимно однозначно отображается на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  (проверьте!). Таким образом, меняющиеся на этой полуплоскости комплексные координаты  $z, \bar{z}$  (или вещественные  $x, y, z = x + iy$ ) определяют новые параметры на единичном круге, а значит, и на плоскости Лобачевского. Запишем в этих новых координатах скалярное произведение касательных векторов. Прямое вычисление дает

$$\langle \xi, \eta \rangle = -\frac{2}{(z - \bar{z})^2} \left( \frac{dz}{dt} \frac{d\bar{z}}{d\tau} + \frac{dz}{d\tau} \frac{d\bar{z}}{dt} \right) = \frac{1}{y^2} \left( \frac{dx}{dt} \frac{dx}{d\tau} + \frac{dy}{dt} \frac{dy}{d\tau} \right)$$

(проверьте!). Верхняя полуплоскость  $y > 0$  с заданным этой формулой скалярным произведением называется *моделью Пуанкаре плоскости Лобачевского на верхней полуплоскости*.

## 16.11 Углы в модели Пуанкаре

Заметим, что матрица скалярного произведения в любой модели Пуанкаре скалярна, т.е. пропорциональна единичной матрице (в вещественных координатах  $x, y$  или  $x_1, x_2$ ). Поэтому *угол в геометрии Лобачевского между любыми двумя кривыми равен евклидовому углу между этими кривыми на плоскости с декартовыми координатами  $x_1, x_2$  или  $x, y$* . Действительно, скалярное произведение любых двух векторов, приложенных в одной точке плоскости Лобачевского, равно

их евклидовому скалярному произведению, умноженному на коэффициент, зависящий только от точки приложения векторов, но не от них самих (этот коэффициент равен  $4/(1 - (x_1^2 + x_2^2))^2$  в единичном круге и  $1/y^2$  в верхней полуплоскости). Поэтому в формуле для косинуса угла указанный коэффициент сокращается — на него умножается и числитель, и знаменатель дроби.

## 16.12 Прямые в модели Пуанкаре

Одно из важных свойств моделей Пуанкаре состоит в том, что прямые в них выглядят просто — это евклидовы прямые и дуги евклидовых окружностей.

**Предложение 16.25.** *Прямыми плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре на единичном круге являются диаметры этого круга и дуги евклидовых окружностей, пересекающие ограничивающую круг окружность под прямым углом.*

*Доказательство.* Прямые модели в круге — это образы прямых векторной модели при стереографической проекции. Напомним, что в векторной модели прямые — это пересечения псевдосферы с плоскостями, проходящими через начало координат; в координатах  $(x_0, x_1, x_2)$  пространства Минковского каждая такая плоскость задается линейным уравнением  $Ax_1 + Bx_2 + Cx_0 = 0$ . Вспоминая параметрические уравнения псевдосферы, приведенные в начале главы, получим, что в псевдосферических координатах  $u, v$  уравнения прямых имеют вид  $A \operatorname{sh} u \cos v + B \operatorname{sh} u \sin v + C \operatorname{ch} u = 0$ . Разделив это равенство на  $1 + \operatorname{ch} u$ , получим

$$A \frac{\operatorname{sh} u}{1 + \operatorname{ch} u} \cos v + B \frac{\operatorname{sh} u}{1 + \operatorname{ch} u} \sin v + C \frac{\operatorname{ch} u}{1 + \operatorname{ch} u} = 0.$$

Подставим в это уравнение формулы стереографической проекции:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\operatorname{sh} u}{1 + \operatorname{ch} u} \cos v, & x_2 &= \frac{\operatorname{sh} u}{1 + \operatorname{ch} u} \sin v, \\ x_1^2 + x_2^2 &= \frac{\operatorname{sh}^2 u}{(1 + \operatorname{ch} u)^2} = \frac{\operatorname{ch} u - 1}{\operatorname{ch} u + 1} = 2 \frac{\operatorname{ch} u}{\operatorname{ch} u + 1} - 1; \end{aligned}$$

в результате получим  $2Ax_1 + 2Bx_2 + C(x_1^2 + x_2^2 + 1) = 0$ . Если  $C = 0$ , это уравнение задает евклидову прямую, проходящую через начало координат (диаметр единичного круга); если  $C \neq 0$  — евклидову окружность  $(x_1 - \frac{A}{C})^2 + (x_2 - \frac{B}{C})^2 = \frac{A^2}{C^2} + \frac{B^2}{C^2} - 1$ . Центр этой окружности

расположен в точке с координатами  $A/C, B/C$ , а квадрат радиуса равен  $R^2 = \frac{A^2}{C^2} + \frac{B^2}{C^2} - 1$ ; тем самым треугольник, образованный центром, началом координат и точкой пересечения данной окружности с единичной, удовлетворяет теореме Пифагора  $\frac{A^2}{C^2} + \frac{B^2}{C^2} = R^2 + 1$ , т.е. окружности пересекаются под прямым углом.  $\square$

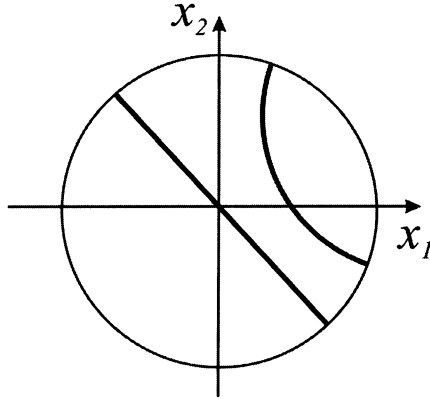


Рис. 16.3: Прямые на плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре на единичном круге

Прямые на верхней полуплоскости получаются из только что указанных кривых в результате применения дробно-линейного преобразования  $w \mapsto z = i(1-w)/(1+w)$ , которое переводит единичную окружность  $|w| = 1$  с выколотой точкой  $w = -1$  в вещественную ось.

**Задача 16.26.** Докажите, что любое дробно-линейное преобразование переводит окружности в окружности (прямые считаются частным случаем окружностей — “окружности бесконечного радиуса”) и сохраняет углы между кривыми.

Из результатов этой задачи следует, что прямые на верхней полуплоскости — это дуги окружностей и полупрямые, пересекающие вещественную ось под прямым углом. Другими словами, это дуги окружностей с центром на действительной оси и вертикальные полупрямые.

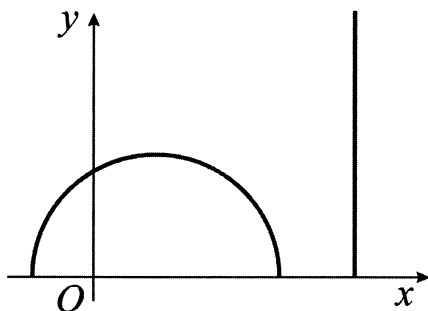


Рис. 16.4: Прямые на плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре на верхней полуплоскости

## 16.13 Движения в модели Пуанкаре

Реализация плоскости Лобачевского как поверхности псевдосферы была удобна тем, что позволяла без труда найти много ее движений — это были ортохронные преобразования Лоренца. В моделях Пуанкаре движения, конечно, выглядят по-другому — оказывается, это дробно-линейные преобразования комплексной плоскости.

**Предложение 16.27.** *Преобразования вида*

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc > 0$$

*и вида*

$$z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc < 0$$

*являются движениями плоскости Лобачевского, реализованной как модель Пуанкаре на верхней полуплоскости.*

**Замечание 16.28.** Заметим, что любое преобразование указанного вида является композицией преобразований сдвига вдоль вещественной оси  $T(a): z \mapsto z + a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , гомотетии  $H(\lambda): z \mapsto \lambda z$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$ , осевой симметрии  $S: z \mapsto -\bar{z}$  и инверсии  $I: z \mapsto 1/\bar{z}$ . Действительно, если  $c \neq 0$ , то преобразование  $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$  имеет вид  $T(a/c) \circ H((ad - bc)/c^2) \circ S \circ I \circ T(d/c)$ , а преобразование  $z \mapsto (a\bar{z} + b)/(c\bar{z} + d)$  имеет вид  $T(a/c) \circ H((bc - ad)/c^2) \circ I \circ T(d/c)$ . Если же  $c = 0$ , то преобразования имеют вид  $T(b/d) \circ H(a/d)$  и  $T(b/d) \circ H(-a/d) \circ S$  соответственно (проверьте!). Таким образом, достаточно проверить, что



сдвиги, гомотетии, осевые симметрии и инверсии являются движениями. Для сдвигов, гомотетий и осевых симметрий это очевидно; для преобразования I проверяется элементарным вычислением (надо убедиться, что при применении соответствующего преобразования длина касательного вектора к кривой не меняется).

Ясно, что из доказанного предложения легко получить запас движений плоскости Лобачевского, реализованной как единичный круг: для этого надо посмотреть, какие преобразования единичного круга порождают изометрии верхней полуплоскости при отображении  $z \mapsto w = (i - z)/(i + z)$ .

## Литература к главе 16

- [1] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. *Курс дифференциальной геометрии и топологии*. СПб: Лань, 2010.
- [2] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия*, в 3-х т. М: URSS, 2013.
- [3] Алексеевский Д.В., Винберг Э.Б., Солодовников А.С. *Геометрия пространств постоянной кривизны*. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 29 (Геометрия-2). М: ВИНТИ, 1988.

## Упражнения к главе 16

**Упражнение 16.1.** Докажите теорему косинусов на плоскости Лобачевского (предложение 16.15).

**Упражнение 16.2.** Для треугольника на плоскости Лобачевского со сторонами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и противолежащими им углами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  докажите теорему синусов:

$$\frac{\sin \alpha}{\operatorname{sh} a} = \frac{\sin \beta}{\operatorname{sh} b} = \frac{\sin \gamma}{\operatorname{sh} c}.$$

**Упражнение 16.3.** Докажите, что ортогональные дополнения к плоскостям, определяющим две перпендикулярные прямые на плоскости Лобачевского, ортогональны.

**Упражнение 16.4.** Докажите, что через данную точку плоскости Лобачевского проходит ровно одна прямая, перпендикулярная данной прямой.

**Упражнение 16.5.** Докажите формулу для расстояния от точки до прямой в векторной модели плоскости Лобачевского

$$\operatorname{sh} \rho = |\langle \xi, e \rangle|,$$

где  $\xi$  — радиус-вектор точки, а  $e$  — единичный вектор, определяющий плоскость, которая задает прямую (эта плоскость состоит из векторов  $\eta$ , для которых  $\langle \eta, e \rangle = 0$ ).

**Упражнение 16.6.** Как выглядят окружности в векторной модели плоскости Лобачевского?

**Упражнение 16.7.** Вокруг всякого ли треугольника на плоскости Лобачевского можно описать окружность?

**Упражнение 16.8.** Даны стороны треугольника на плоскости Лобачевского. Найти радиус описанной окружности.

**Упражнение 16.9.** Докажите, что любое дробно-линейное преобразование переводит окружности в окружности (прямые считаются частным случаем окружностей — “окружности бесконечного радиуса”) и сохраняет углы между кривыми.

**Упражнение 16.10.** Докажите, что сумма углов треугольника на плоскости Лобачевского меньше  $\pi$ .

**Упражнение 16.11.** Докажите, что расстояние между точками в модели Пуанкаре на верхней полуплоскости определяется формулой

$$\rho(z_1, z_2) = \ln \frac{1 + \left| \frac{z_1 - z_2}{z_1 - \bar{z}_2} \right|}{1 - \left| \frac{z_1 - z_2}{z_1 - \bar{z}_2} \right|}.$$

**Упражнение 16.12.** Найдите окружности в моделях Пуанкаре.

**Упражнение 16.13.** Докажите, что для каждой точки  $P$  на плоскости Лобачевского и каждого угла  $\alpha$  существует “поворот вокруг точки  $P$  на угол  $\alpha$ ” — движение, оставляющее точку  $P$  на месте и поворачивающее на угол  $\alpha$  любой касательный вектор, приложенный в точке  $P$ .

**Упражнение 16.14.** Найдите явный вид “поворота вокруг точки  $z$  на угол  $\alpha$ ” в модели Пуанкаре на верхней полуплоскости.

**Упражнение 16.15.** Пусть  $G$  — множество движений вида

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1$$

модели плоскости Лобачевского на верхней полуплоскости, имеющих на всей комплексной плоскости ровно две заданные неподвижные точки  $x_1, x_2$ , причем каждая из них лежит на вещественной оси. Найдите орбиту заданной точки  $P$  плоскости Лобачевского под действием множества преобразований  $G$ . Поясним, что орбита — это множество точек плоскости Лобачевского, в которые переходит  $P$  под действием всевозможных преобразований из  $G$ .

**Упражнение 16.16.** Докажите формулы решения прямоугольных треугольников на плоскости Лобачевского (угол  $\gamma$  прямой)

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} c &= \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b; & \operatorname{sh} b &= \operatorname{sh} c \sin \beta; & \operatorname{th} a &= \operatorname{th} c \cos \beta; \\ \operatorname{ch} c &= \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta; & \cos \alpha &= \operatorname{ch} a \sin \beta; & \operatorname{th} a &= \operatorname{sh} b \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

# Предметный указатель

Аддитивная функция 138

Алгоритм

Мелзака 172

обратный ход 174

прямой ход 174

Аффинное отображение из отрезка в

$\mathbb{R}^n$  50

вырожденное 50

невыврожденное 50

База окрестностей 30

индуцированная 35

непрерывное отображение 32

открытое множество 33

окрестность точки 33

отображение, непрерывное

в точке 32

топологическое пространство 33

база пространства 33

гомеоморфизм 36

гомеоморфные

топологические

пространства 36

замкнутое подмножество 42

компактное 42

компонента 40

линейно связная компонента

40

линейно связное 39

локально постоянная

функция 40

непрерывная кривая 39

открытое покрытие 42

подпокрытие 42

топология 33

Зарисского 44

антидискретная 44

дискретная 44

индуцированная 35

Вещественные числа

аддитивная функция 138

зависимость 138

Выпуклое подмножество  $\mathbb{R}^n$  83

Геометрическая оптимизационная  
задача 149

вариационный

функционал 149

конфигурационное

пространство 149

оптимальный объект 149

целевая функция 149

экстремаль 149

экстремальный объект 149

Геометрия Лобачевского 326

Гладкая кривая 183

вектор скорости 183

допустимая замена параметра

184

замкнутая 183

регулярная 183

деформация 187

регулярная гомотопия 187

Граф 16, 65

вершина 16

вершины соединены ребром

17

висячая 27

инцидента ребру 17

смежные вершины 17

степень 18

гамильтонов 23

- геометрический 65
    - без самопересечений 65
    - плоский 66
    - реализация комбинаторного графа 66
  - гомеоморфные графы 72
  - граничное отображение 16
  - дерево 27
  - изоморфные графы 66
  - комбинаторный 65
    - комбинаторная структура геометрического графа 65
  - конечный 16
  - лес 67
  - маршрут 20
    - длина 20
    - замкнутый 20
    - путь 20
    - цикл 20
  - непланарный 66
  - отображение графов 65
  - отображение инцидентности 16
  - планарный 66
  - плоский 66
    - грань 67
  - подграф 68
  - полный 24
  - полный двудольный 66
  - простой 17, 18
  - ребро 16
    - инциденто вершине 17
    - кратная петля 17
    - кратное ребро 17
    - кратность 17
    - петля 17
    - подразбиение 72
    - смежные ребра 17
  - связная компонента 68
  - связный 20
  - цикл
    - гамильтонов 23
    - простой 23
  - Группа Браве 291
  - Группа движений
    - 1-цикл 297
    - 1-циклы
      - когомологичные 297
    - бордюра 273
      - классификация 277
    - дискретная 266
    - кограница 297
    - кристаллографическая 281
  - арифметическая голоэдриа 291
  - арифметический класс 288
  - кристаллографический класс 285
    - тип Браве 291
  - кристаллографическая группа
    - классификация 293
  - одномерные когомологии 297
  - плоскости
    - дискретная 281
    - кристаллографическая 281
    - осевая симметрия 269
    - поворот 269
    - сдвиг 269
    - скользящая симметрия 269
    - федоровская 281
    - фундаментальная область 281
  - Группа симметрий
    - 1-цикл 297
      - когомологичные 1-циклы 297
      - кограница 297
    - бордюра 273
      - классификация 277
    - кристаллографическая 281
      - арифметическая голоэдриа 291
      - арифметический класс 288
      - кристаллографический класс 285
        - тип Браве 291
    - кристаллографическая группа
      - классификация 293
    - одномерные когомологии 297
    - плоскости
      - дискретная 281
      - кристаллографическая 281
      - осевая симметрия 269
      - поворот 269
      - сдвиг 269
      - скользящая симметрия 269
      - федоровская 281
      - фундаментальная область 281
- Дерево
  - дерево Штейнера 171
    - невырожденная компонента 172
    - невырожденное 172
    - полная компонента 172

- полное 172
  - усы 172
  - кратчайшее 168
  - минимальное дерево Штейнера 168
- Зависимость** 138
- Задача**
- Ферма 169
  - Штейнера 168
  - Эйлера 19
- Замоещение плоскости** 257
- Инверсия** 228
- радиус или степень 228
  - свойства 229
  - центр или полюс 228
- Квазикристаллы** 301
- Конус над подмножеством  $\mathbb{R}^3$**  99
- Кривая**
- вписанная ломаная 150
  - геодезическая 162
  - гладкая 160, 183
    - вектор скорости 160
    - регулярная 183
  - длина в пространстве  $\mathbb{R}^n$  150
  - замкнутая 183
    - гладкая 183
  - кратчайшая 150
- Криволинейный двумерный симплекс** 201
- край 203
  - нульмерная грань 201
  - одномерная грань 201
  - внутренняя 203
  - краевая 203
  - ориентированный 204
- Кристаллы** 256
- Критерий эйлеровости графа** 21
- Лемма**
- Комбинаторная лемме Коши 126
  - Тригонометрическая
- лемма Коши 119
- о рукопожатиях 18
  - о четырех точках на замкнутой ломаной 62
- Ломаная**
- вписанная в кривую 150
  - длина в пространстве  $\mathbb{R}^n$  150
- Ломаная в  $\mathbb{R}^n$**  49
- вершины 49
    - внутренние 49
    - концевые 49
  - замкнутая 49
    - без самопересечений 49
  - незамкнутая 49
    - без самопересечений 49
  - ребра 49
    - внутренние 49
    - концевые 49
- Метрика** 152
- свойства
    - неравенство
- треугольника** 152
- положительная
- определенность** 152
- симметричность 152
  - соответствующая норме 153
- Метрическое пространство** 152
- Многогранная поверхность** 77
- вершина 78
  - грань 78
  - граф 81
  - двойственный граф 82
    - геометрическая реализация 87
  - замкнутая 80
  - инцидентность 80
  - ребро 78
    - внутреннее 80
    - граничное 80
- Многогранник** 81
- Штеффена 131
  - внешность 81
  - внутренность 81
  - выпуклый 83
  - ёж 91
    - геометрическая реализация двойственного графа 87
  - правильный 89
- граница** 81
- границы, устроенные одинаково 124
  - отождествление границ многогранников 125
  - изгибаемый 129
  - изоморфизм графов многогранников, согласованный со структурой граней 124
  - инвариант Дена 139

многоугольник на его  
 поверхности 94
 

- внешность 94
- внутренность 94
- граница 94
- угол в вершине 94

 обобщенный инвариант Дена 148
 

- октаэдр Брикара 130
- поверхность 81
- правильный 89
- равновеликие многогранники 137
- равнодополняемые многогранники 144
- равноставленные многогранники 137
- разрезание на многогранники 137
- функция Дена 139

 Многогранный угол 99
 

- вершина 100
- грань 99
  - смежные грани 100
- двугранный угол 100
- плоский угол 100
- ребро 99
- соответствующий сферический многоугольник 100

 Многоугольник 76
 

- внешность 77
- внутренность 77
- выпуклый 83
- граница 77
- пространственный 77
  - плоскость его 77
- равновеликие многоугольники 137
- равноставленные многоугольники 137
- разрезание на многоугольники 136
  - смежные многоугольники 78
  - цепочка многоугольников 78

 Множество
 

- полуалгебраическое 235
- рисуемое шарнирным механизмом 235, 252

 Мозаики Пенроуза 303

**Н**епараметризованная регулярная кривая 184

Непрерывная кривая 39
 

- замкнутая 46

без самопересечений 46
 

- незамкнутая 46
  - без самопересечений 46

 Норма 152
 

- евклидова 153
- манхеттенская 153
- свойства
  - положительная однородность 152
  - положительная определенность 152
  - субаддитивность 152

 Нормированное пространство 153
 

- манхеттенское 153

**О**граниченное подмножество  $\mathbb{R}^n$  42

Орнаменты 256

Открытый круг в  $\mathbb{R}^2$  31

Открытый шар в  $\mathbb{R}^n$  31

**П**араллелограмм Ватта 241

Паровая машина 239

Плоскость Лобачевского 326
 

- движения в моделях Пуанкаре 339
- модель Пуанкаре в единичном круге 335
- модель Пуанкаре на верхней полуплоскости 336
- нарушение постулата параллельных 328
- окружность 330
- признаки равенства треугольников 332
- прямые 327
- расстояние между точками 329
- треугольники 330

Поверхность 200
 

- бутылка Клейна 207
- пленка Мёбиуса 206
- проективная плоскость 207
- ручка 209
- связная 210
- тор 207
- триангулируемая 202
  - компонента края 204
  - край 203
  - ориентированная 204
  - ориентируемая 205
- триангуляция 202

цилиндр 207  
 эйлера характеристика 219  
 Полуалгебраическое множество 235  
 Проблема Штейнера 168  
 Пространственный многоугольник 77  
 плоскость его 77  
 Пространство Минковского 309  
 вектор  
 времениподобный 310  
 изотропный или световой 310  
 одинаково ориентированные во времени векторы 311  
 по-разному ориентированные во времени векторы 311  
 пространственно-подобный 310  
 замедление времени 320  
 инерциальный наблюдатель 318  
 мировая линия 311  
 ортонормированный базис 310  
 относительность одновременности 320  
 парадокс близнецов 322  
 подпространство  
 гиперболическое или подпространство Минковского 313  
 ортогональное дополнение 312  
 параболическое 314  
 трансверсальные подпространства 312  
 эллиптическое или евклидово 313  
 преобразование Лоренца 315  
 буст 317  
 гиперболический поворот 316  
 неортохронное 316  
 ортохронное 316  
 псевдосфера 325  
 касательный вектор в точке 325  
 световой конус 311  
 собственное время наблюдателя 318  
 события 310  
 сокращение длин 320  
 Псевдоевклидово скалярное произведение 310  
 ортонормированный базис 310

Псевдосфера 325  
 геометрия Лобачевского 326  
 длина кривой на псевдосфере 326  
 касательный вектор в точке 325  
 длина 326  
 угол между векторами 326  
 плоскость Лобачевского 326  
 угол между кривыми на псевдосфере 326

## Расстояние

между подмножествами  $\mathbb{R}^n$  51  
 от точки до подмножества  $\mathbb{R}^n$  51  
 Регулярная кривая 183  
 деформация 187  
 замкнутая  
 число Уитни 197  
 число вращения 189  
 регулярная гомотопия 187  
 Решетка Браве 291

## Сеть 167

внутренняя вершина 167  
 граничная вершина 167  
 граничное множество 167  
 дерево Штейнера 171  
 невырожденная компонента 172  
 невырожденное 172  
 полная компонента 172  
 полное 172  
 длина 167  
 кратчайшее дерево 168  
 минимальное дерево Штейнера 168  
 соединяет множество 167  
 Сингония 291  
 Стандартный двумерный симплекс 201  
 край 203  
 нульмерная грань 201  
 одномерная грань 201  
 ориентированный 204  
 Стопоходящая машина Чебышева 242  
 Сфера  
 большая окружность 97  
 замкнутая сферическая ломаная 97  
 замкнутые подмножества 96  
 касательная плоскость 99



компонента подмножества 97  
 линейная связность  
     подмножества 97  
 непрерывные кривые 97  
 окружность на сфере 110  
 открытые подмножества 96  
 открытые сферические круги 96  
 расстояние на сфере 109  
 сферическая ломаная 97  
     правильная 155  
 сферическая ломаная без  
     самопересечений 97  
 сферическая прямая 97  
 сферический отрезок 97  
     большой 102  
     дополнительные  
 сферические отрезки 102  
     малый 102  
     сферический треугольник 108  
     сферический  
 многоугольник 98  
     величина угла 99  
     внешность 98  
     внутренность 98  
     выпуклый 101  
     граница 98  
     двуугольник 100  
     длина стороны 98  
     дополнительные  
 многоугольники 98  
     одноугольник 100  
     соответствующий  
 многогранный угол 100  
     эйлеров 105  
     эйлеров многоугольник 105  
     диагональ 106  
     эйлеров треугольник  
     двойственная теорема  
     косинусов 114  
     строгое неравенство  
 треугольника для  
 длин сторон 113  
     сумма углов 115  
     теорема Пифагора 112  
     теорема косинусов 111  
     теорема синусов 113  
 Сферический многоугольник  
     величина угла 99  
     внешность 98  
     внутренность 98  
     выпуклый 101  
     граница 98  
     двуугольник 100  
     длина стороны 98

дополнительные  
 многоугольники 98  
     одноугольник 100  
     соответствующий  
 многогранный угол 100

## Теорема

Жордана для замкнутой  
     многогранной поверхности  
     80  
 Бибераха теоремы 300  
 Бойяи–Валласа–Гервина 137  
 Двойственная сферическая  
 теорема косинусов 114  
 Двойственная теорема  
     косинусов на плоскости  
     Лобачевского 331  
 Дена 139  
 Дирака — достаточное условие  
     гамильтоновости 24  
 Жордана о кривой без  
     самопересечений, лежащей  
     на евклидовой плоскости 47  
 Жордана о ломаной без  
     самопересечений, лежащей  
     на евклидовой плоскости 50  
 Интегральная формула длины  
     пространственной кривой  
     161  
 Кемпе 236  
 Классификация дискретных  
 групп движения  
 прямой 267  
     Классификация замощений  
     плоскости равными  
     правильными  
     многоугольниками 258  
     Классификация замощений  
     плоскости разными  
     правильными  
     многоугольниками 260  
     Классификация плоских  
     кристаллографических  
     групп (17 штук) 293  
     Классификация связных  
     ориентируемых  
     поверхностей без края 210  
     Классификация связных  
     неориентируемых поверхностей без  
     края 216  
     Классификация  
     кристаллографических  
     классов (10 штук) 286

Косинусов на плоскости  
     Лобачевского 331  
 Коши о жесткости выпуклых  
     многогранников 125  
 Критерий компактности  
 подмножества  $\mathbb{R}^n$  42  
 Минковского о ежике 92  
 О локальной структуре  
     минимальных сетей на  
     поверхности  
     многогранника 176  
 О локальной структуре  
 кратчайшего дерева 170  
 О максимальном и  
 минимальном значениях  
 непрерывной функции  
 на компакте 43  
 О невозможности замостить  
 плоскость равными  
 выпуклыми  
*n*-угольниками,  $n \geq 7$  262  
 О сохранении компактности  
 при непрерывном  
 отображении 42  
 Сабитова о сохранении объема  
     многогранника при  
     изгибании 133  
 Синусов на плоскости  
     Лобачевского 331  
 Строгое неравенство  
     треугольника для длин  
     сторон эйлера  
     треугольника 113  
 Сумма углов сферического  
 треугольника 115  
 Сферическая теорема Жордана  
     98  
 Сферическая теорема Пифагора  
     112  
 Сферическая теорема косинусов  
     111  
 Сферическая теорема синусов  
     113  
 Уитни 197  
 Уитни–Грауштейн 190  
 Формула Максвелла 176  
 Формула Эйлера 69  
 Формула Эйлера для выпуклых  
     многогранников 89  
 Хивуда о пяти красках 74  
 Хопфа 194  
 Цассенхауза 301  
 Шаля 269  
 свойства инверсии 229

Тетраэдр  
     Хилла 141  
     координатный 145  
 Топологическое пространство 33  
     база пространства 33  
     гомеоморфизм 36  
     гомеоморфные тополо-  
     гические пространства 36  
     замкнутое подмножество 42  
     компактное 42  
     компонента 40, 46  
     компонента линейной связности  
         46  
     линейно связная компонента 40  
     линейно связное 39  
     локально  
     постоянная функция 40  
     непрерывная кривая 39  
     непрерывное отображение 33  
     открытое покрытие 42  
     подпокрытие 42  
 Триангулируемая поверхность 202  
     бутылка Клейна 207  
     замкнутая цепочка  
 симплексов 205  
     край 203  
         компонента края 204  
     операции  
         вклейка ручки 209  
         вклейка  
 пленки Мёбиуса 216  
     вырезание дырки 208  
     заклейка дырки диском 208  
     ориентированная 204  
     ориентируемая 205  
     отображение поверхностей  
         гомеоморфизмом 207  
         непрерывное 207  
         непрерывное в точке 207  
     пленка Мёбиуса 206  
     проективная плоскость 207  
     ручка 209  
     связная 210  
     тор 207  
     цепочка симплексов  
         обращает ориентацию 205  
         сохраняет ориентацию 205  
     цилиндр 207  
     эйлерова характеристика 219

**Ф**ункция  
     периодическая 185  
     период 185

среднее значение 186  
 Функция расстояния 152  
 свойства  
 неравенство  
 треугольника 152  
 положительная  
 определенность 152  
 симметричность 152  
 соответствующая норме 153

**Ш**арнирный механизм 221, 246  
 антипараллелограмм 222  
 граница 246  
 граничное отображение 246  
 инверсор Гарта 233  
 инверсор Поселье 231  
 конфигурационное  
 пространство 246  
 антипараллелограмм 251  
 модифицированного  
 механизма 248  
 параллелограмм 251  
 ромб 248  
 конфигурация 246  
 положение шарнира в  
 конфигурации 246  
 лямбда-механизм 242  
 ограничение на механизм 248  
 один механизм лежит в другом  
 248  
 операции  
 добавление одного механизма  
 к другому 248  
 добавление шарнира 247  
 добавление шарнира в  
 середину стержня 247

добавление шарнира на луч  
 247  
 добавление шарнира на луч  
 вне стержня 247  
 добавление шарнира на  
 прямую 247  
 добавление шарнира  
 на стержень 247  
 операция  
 укрепление 250  
 параллелограмм Ватта 241  
 положение шарнира в  
 конфигурации 246  
 кратность положения 246  
 реализующий параллельный  
 перенос 222  
 реверсор Кемпе 226  
 рисует множество 235  
 стержень 245  
 длина 245  
 сумматор Кемпе 227  
 транслятор Кемпе 225  
 укрепление 250, 251  
 укрепление анти-  
 параллелограмма 223  
 укрепление параллелограмма  
 223  
 укрепленный ромб 248  
 шарнир 245  
 внутренний 246  
 граничный 245  
 конфигурационное  
 множество шарнира 246  
 неподвижный 245  
 подвижный 245

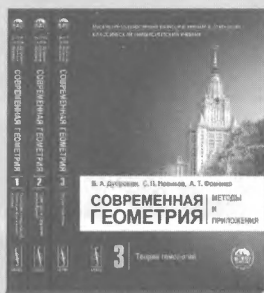
Издательская группа

**URSS**



представляет

Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко • Современная геометрия: Методы и приложения



**Настоящая  
классика  
в 3 томах**

## 1 Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей

Первый том включает в себя изложение геометрии пространства Евклида и Минковского, их групп преобразований, классической геометрии кривых и поверхностей, тензорного анализа и римановой геометрии, вариационного исчисления и теории поля, основ теории относительности.

## 2 Геометрия и топология многообразий

Во втором томе представлено изложение геометрии и топологии многообразий, в том числе основ теории гомотопий и расслоений, некоторых их приложений, в частности к теории калибровочных полей.

## 3 Теория гомологий

Третий том содержит доступное изложение методов теории гомологий, освобожденное от утомительного языка абстрактной гомологической алгебры. Более сложная часть книги содержит введение в современные методы вычисления гомотопических групп и классификации многообразий.

П. К. Рашевский • Риманова геометрия и тензорный анализ



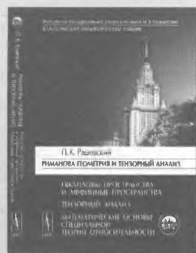
Выдающийся  
советский геометр,  
основатель  
научной школы

Создатель  
полиметрической  
геометрии

# РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

Классический труд  
Петра Константиновича Рашевского

в двух книгах:



Римановы пространства и пространства аффинной связности. Тензорный анализ. Математические основы общей теории относительности

Евклидовы пространства и аффинные пространства. Тензорный анализ. Математические основы специальной теории относительности

Научное издательство

**URSS**



Сохранять, развивать  
и приумножать научное наследие



# ПРОФЕССИЯ КАК ДЕЛО ЖИЗНИ

**Наши мечты схожи?  
Мы с Вами на одной  
волне? Наука вошла  
в Вашу жизнь и Вы не  
хотите с ней расставаться?**

Нефть, газ, лес — не единственное наше достояние! Нам всего лишь повезло родиться в стране с богатейшей природой. Но Россия не есть только источник природных ресурсов. Нет! Она — кладьезь человеческого капитала — капитала, который должен неустанно давать цивилизации всё новые научно-культурные богатства. Надо принять вызов — добиться, чтобы нашу страну ассоциировали в первую очередь с созданием высококачественных интеллектуальных ценностей.

**МЫ МОЖЕМ  
И ДОЛЖНЫ  
ЗАРАБАТЫВАТЬ  
ИНТЕЛЛЕКТОМ!**

Научно-издательское дело — неотъемлемая часть института науки. Предлагаем Вам реализовать свои знания и творческий потенциал у нас, в научном издательстве URSS...▶.....

▶...Ведь это:

## Достойно

- ▶ Общение с ведущими учеными, деятелями науки и культуры.
- ▶ Работа с интеллектуальным богатством.
- ▶ Духовное и научно-культурное обогащение.
- ▶ Продвижение знаний.
- ▶ Утверждение интеллектуальных и культурных ценностей.

Донесем интеллектуальный и духовный капитал страны до всех, живущих в русскоязычном пространстве, и до мирового сообщества!

## Перспективно

- ▶ Раскрыть свой потенциал.
- ▶ Быть уверенным, что Ваше время вкладывается со смыслом.
- ▶ Понимать, что выборный путь обеспечивает Вам рост благосостояния и экономическую устойчивость.
- ▶ Ощущать, что Ваша работа зажигает оптимизмом и укрепляет жизненные силы.

Научно-издательская деятельность — это правильный выбор для тех, кто хочет оставаться в научной среде!

## Осуществимо

Если Вы:

- ▶ целеустремленный и активный,
- ▶ работоспособный и креативный,
- ▶ заинтересованы в личном росте,
- ▶ стремитесь усваивать новые знания и умения,
- ▶ готовы делиться Вашими опытом и навыками,
- ▶ хотите влиться в коллектив профессиональных и эффективных, честных и надежных людей, и усилить его Вашу индивидуальностью —

это тот достаточный багаж, с которым мы с радостью примем Вас в наш коллектив.

**Поможем, поддержим, научим!**

## Присоединяйтесь к проекту URSS!

Звоните:

+7 (499) 724 25 45

Пишите: URSS@URSS.ru

Добавляйтесь:

**B** vk.com/editorial\_urss

**f** facebook.com/urss

Заходите:

117335, Москва, Нахимовский пр-т, 56

http://URSS.ru

## Андрей Александрович ОШЕМКОВ

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова. Специалист в области качественного исследования динамических систем, в симплектической и пуассоновой геометрии, в теории особенностей интегрируемых гамильтоновых систем.

## Федор Юрьевич ПОПЕЛЕНСКИЙ

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова. Научные интересы относятся к алгебраической топологии, некоммутативной геометрии, гомотической алгебре.

## Алексей Августинovich ТУЖИЛИН

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, заведующий лабораторией компьютерных методов в естественных и гуманитарных науках. Член Ученого совета механико-математического факультета МГУ. Совместно с А. О. Ивановым создал новый раздел математики, изучающий разветвленные экстремали одномерных вариационных функционалов. За цикл работ по теории разветвленных экстремалей одномерных вариационных задач А. А. Тужилин (совместно с А. О. Ивановым) удостоен первой премии имени И. И. Шувалова 2001 года. Автор более 100 научных работ, 8 монографий и учебников. Специалист в области геометрии и топологии, вариационного исчисления, метрической геометрии, теории экстремальных сетей, теории графов, компьютерной геометрии.

## Анатолий Тимофеевич ФОМЕНКО

Академик Российской академии наук (РАН), действительный член академий: МАН ВШ (Международной академии наук высшей школы), АТН РФ (Академии технологических наук Российской Федерации). Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова. Решил известную проблему Плато в теории спектральных минимальных поверхностей; создал теорию классификации интегрируемых динамических систем. Лауреат Государственной премии Российской Федерации (в области математики) за работы по теории инвариантов многообразий и гамильтоновых систем. Лауреат премии Московского математического общества и лауреат премии Президиума АН СССР. Автор более 250 научных работ, 30 монографий и учебников. Специалист в области геометрии и топологии, вариационного исчисления, теории минимальных поверхностей, симплектической топологии, гамильтоновой геометрии и механики.

## Андрей Игоревич ШАФАРЕВИЧ

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова; по совместительству работает в Московском физико-техническом институте. Член методического совета механико-математического факультета МГУ, ученого совета МФТИ, диссертационного совета МИЭМ ВШЭ. Руководит группой в Международной лаборатории имени Бернулли. Развил новые методы изучения вихревых решений уравнений гидродинамики, описания спектральных серий несамосопряженных операторов и операторов с сингулярными коэффициентами, исследования эволюционных уравнений на клеточных комплексах.

18455 ID 202732



9 785971 024064

Издательская группа



Каталог изданий  
в Интернете:  
<http://URSS.ru>

E-mail: [URSS@URSS.ru](mailto:URSS@URSS.ru)

117335, Москва, Телефон / факс  
Нахимовский (многоканальный)  
проспект, 56 +7 (499) 724 25 45

Отзывы о настоящем издании, а также обнаруженные опечатки присылайте по адресу [URSS@URSS.ru](mailto:URSS@URSS.ru).  
Ваши замечания и предложения будут учтены и отражены на web-странице этой книги на сайте <http://URSS.ru>